© 2012 г. Ю.Г. ЕВТУШЕНКО, академик РАН
(Вычислительный цент им. А.А. Дородницына РАН, Москва),
М.А. ПОСЫПКИН, канд. физ.-мат. наук
(Институт системного анализа РАН, Москва)

Метод неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации с заданной точностью[1]

Работа посвящена применению метода неравномерных покрытий для решения задач многокритериальной оптимизации. Определяется ε-Парето множество и исследуются его свойства. Описан алгоритм построения ε-Парето множества с гарантированной заданной точностью ε. Обсуждаются вопросы эффективной реализации данного подхода и приводятся результаты экспериментов.

Non-uniform coverage method for solving multicriteria optimization problems with guaranteed accuracy / Yu. G. Evtushenko (Dorodnicyn Computing Centre RAS, Vavilov st. 40, 119333 Moscow, Russia, E-mail: evt@ccas.ru), M.A. Posypkin (Institute Of Systems Analysis of Russian Academy of Sciences,117312, Moscow, pr. 60-letiya Oktyabrya, 9).
The paper is devoted to the application of the non-uniform coverage method to solving multicriteria optimization problems. In the paper the concept of ε-Pareto set is defined and studied. The algorithm to construct and ε-Pareto set with guaranteed accuracy is described. The effient implementation of the efficient implementation of this approach are described and experimental results are presented.

1. Введение

В настоящее время опубликовано большое число работ по многокритериальной оптимизации. Общую информацию по методам решения таких задач можно найти в монографиях [1–3]. Подробный обзор современного состояния исследований по этой теме можно найти в [4]. Одним из важных направлений в многокритериальной оптимизации являются методы, основанные на аппроксимации множества Парето [2, 5–10]. Есть также и другие подходы к решению задач многокритериальной оптимизации, представленные в работах [12–15].

В данной работе рассматривается подход к аппроксимации множества Парето, основанный на методе неравномерных покрытий. Этот метод успешно использовался для поиска глобального экстремума функций многих переменных. Его развитию, обобщению и эффективной реализации посвящено большое число публикаций. Укажем первую из них [11] и некоторые из последних [16–20]. В [8] метод был перенесен на

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 11-01-12136-офи-м 10-07-00700-а, 10-07-00640-а).

многокритериальные задачи благодаря удачному определению понятия множества ε-Парето.

Метод неравномерных покрытий позволяет получать множество ε-Парето для заданного ε, т.е. гарантирует ε-оптимальность получаемой аппроксимации. Эта особенность метода неравномерных покрытий является уникальной и отсутствует в других подходах к решению задач многокритериальной оптимизации. Для некоторых применений задач многокритериальной оптимизации иметь гарантированную точность решения очень важно. К такому классу относится например задача построения границы области достижимости робота-манипулятора [21].

В данной работе доказываются новые свойства множества ε-Парето, показана его связь с оболочкой Эджворта-Парето. Первоначальный вариант метода, предложенный в работе [8] применялся в предположении, что функции критериев удовлетворяют условию Липшица. В данной работе метод неравномерных покрытий для многокритериальных задач обобщен на случай произвольных минорант. Проведен сравнительный анализ численных расчетов двух простейших задач, показывающий эффективность предложенного подхода.

В работе используются следующие обозначения. Компоненты n-мерного вектора x обозначаются верхним индексом, заключенным в круглые скобки: $x = (x^{(1)}, .., x^{(n)})$. Через $\|x\|$ обозначается евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$: $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})^2}$. Запись $|x|$ обозначает вектор $(|x^{(1)}|, .., |x^{(n)}|)$, составленный из абсолютных величин компонент x. Векторные неравенства выполняются покомпонентно.

2. Определение Парето-оптимального решения многокритериальной задачи

Задача многокритериальной минимизации условно записывается в виде:

$$\min_{x \in X} F(x), \tag{1}$$

где X — допустимое множество параметров, а вектор-функция $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определяет векторный критерий, компоненты которого $f^{(1)}(\cdot), \ldots, f^{(m)}(\cdot)$ составляют набор из m скалярных критериев. Образ $Y = F(X)$ допустимого множества X при отображении F назовем *множеством достижимых критериальных векторов*. Всюду далее вектор-функция $F(\cdot)$ предполагается непрерывной, а множество X — непустым компактом. При сделанных предположениях множество Y также будет непустым компактом.

Для произвольной точки $z \in \mathbb{R}^m$ определим *юго-западное* $\mathrm{SW}(z)$ и *северо-восточное* $\mathrm{NE}(z)$ множества следующим образом:

$$\mathrm{SW}(z) = \{y \in \mathbb{R}^m : y \leqslant z\}, \ \ \mathrm{NE}(z) = \{y \in \mathbb{R}^m : y \geqslant z\}.$$

Для произвольного множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ определим его *множество Парето* $\mathcal{P}(\Omega)$ следующим образом:

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\omega \in \Omega : \Omega \cap \mathrm{SW}(\omega) = \omega\}. \tag{2}$$

Если в качестве Ω взять множество достижимых критериальных векторов Y, то данное определение совпадает со стандартным определением множества Парето, принятым в работах по многокритериальной оптимизации.

Для определенного таким образом отображения $\mathcal{P} : 2^{\mathbb{R}^m} \to 2^{\mathbb{R}^m}$, справедливо следующее соотношение, выполняющееся для любого $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$:

$$\mathcal{P}\left(\mathcal{P}(\Omega)\right) = \mathcal{P}(\Omega) \subseteq \Omega. \tag{3}$$

Расширим определения $\mathrm{SW}(z), \mathrm{NE}(z)$ на случай произвольного множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$:

$$\mathrm{SW}(\Omega) = \cup_{y \in \Omega} \mathrm{SW}(y), \;\; \mathrm{NE}(\Omega) = \cup_{y \in \Omega} \mathrm{NE}(y).$$

Множество $\mathrm{NE}(\Omega)$ называют *оболочкой Эджворта-Парето* множества Ω. Несложно показать справедливость следующего свойства, верного для любого непустого компактного множества Ω в пространстве $\mathbb{R}^m$:

$$\Omega \subseteq \mathrm{NE}\left(\mathcal{P}(\Omega)\right) = \mathrm{NE}(\Omega). \tag{4}$$

Решение задачи (1) состоит в нахождении множества $P(Y)$ и его прообраза при отображении F. Приведенные определения не накладывают ограничений на мощность множества X. Оно может быть континуальным, счетным или конечным. Так как множество Y является непустым компактом, то $P(Y)$ не пусто [3].

3. Понятие множества ε-Парето

Следуя [8], определим понятие приближенного решения задачи (1). Для $\varepsilon \geqslant 0$ дискретный набор точек $Y_\varepsilon \subseteq Y$ будем называть *множеством ε-Парето*, если:

1) для любой точки $y_* \in \mathcal{P}(Y)$ существует такая точка $y_\varepsilon \in Y_\epsilon$, что

$$y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m \leqslant y_*, \tag{5}$$

2)

$$\mathcal{P}(Y_\varepsilon) = Y_\varepsilon. \tag{6}$$

Здесь вектор e_m обозначает вектор из пространства $\mathbb{R}^m$, все компоненты которого равны 1.

Пункты 1,2 будем называть *первым и вторым условиями ε-оптимальности по Парето* соответственно. Второе условие позволяет отбросить излишние точки из дискретного набора точек Y_ε. Множество $A_\varepsilon \subseteq X$ такое, что $F(A_\varepsilon) = Y_\varepsilon$ называется *ε-оптимальным решением* задачи (1).

Считаем, что задача (1) решена с заданной точностью ε, если найдено множество ε-Парето Y_ε и его прообраз A_ε.

Лемма 1. *Если построено множество ε-Парето Y_ε, то для любой точки y из оболочки Эджворта-Парето $NE(Y)$ найдется такая точка $y_\varepsilon \in Y_\varepsilon$, что*

$$y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m \leqslant y. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathrm{NE}(Y)$. Согласно (4) найдется точка $y_* \in \mathcal{P}(Y)$ такая, что $y_* \leqslant y$. Согласно (5) для точки y_* найдется такая точка y_ε что $y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m \leqslant y_*$. Таким образом, $y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m \leqslant y_* \leqslant y$ и, следовательно, неравенство (7) имеет место. $\square$

Из (5) следует, что множество ε-Парето является одновременно множеством $\overline{\varepsilon}$-Парето для любого $\overline{\varepsilon}$, $\overline{\varepsilon} \geqslant \varepsilon$. В частности, $\mathcal{P}(Y)$ является множеством ε-Парето для любого $\varepsilon \geqslant 0$. Следовательно, при сделанных предположениях о компактности и непустоте Y, при любом $\varepsilon \geqslant 0$ всегда существует хотя бы одно множество ε-Парето. Множество ε-Парето определяется однозначно только при $\varepsilon = 0$. В этом случае оно совпадает с $\mathcal{P}(Y)$. При $\varepsilon > 0$ вообще говоря может быть сколь угодно много множеств, удовлетворяющих введенному определению.

Обозначим через $\partial(\mathrm{NE}(Y))$ границу множества $\mathrm{NE}(Y)$. Рассмотрим множество

$$S_\varepsilon(Y) = Y \cap \cup_{y \in \partial(\mathrm{NE}(Y))} \mathrm{SW}(y + \varepsilon \cdot e_m),$$

которое будем называть ε-полосой множества Y.

Утверждение 1. *Для любого ε-Парето множества Y_ε справедливо включение*

$$Y_\varepsilon \subseteq S_\varepsilon(Y). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть включение (8) не выполняется. Это означает, что существует ε-Парето множество Y_ε, содержащее точку y_ε, не принадлежащую ε-полосе. Несложно показать, что в этом случае точка $y = y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m$ является внутренней точкой множества $\mathrm{NE}(Y)$. Согласно (4) найдется такая точка y_* из $\mathcal{P}(Y)$, что $y_* \leqslant y$. Так как y_* — граничная точка Y, а y — внутренняя, то $y_* \neq y$. По определению множества ε-Парето найдется такая точка $v \in Y_\varepsilon$, что

$$v - \varepsilon \cdot e_m \leqslant y_* \leqslant y = y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m.$$

Отсюда следует, что $v \leqslant y_\varepsilon$. При этом $v \neq y_\varepsilon$. Получили противоречие со вторым условием оптимальности $\mathcal{P}(Y_\varepsilon) = Y_\varepsilon$. $\square$

Для любой точки $u \in \mathbb{R}^m$ и множества $V \subseteq \mathbb{R}^m$ определим расстояние от точки u до множества V следующим образом: $\rho(u, V) = \inf_{v \in V} \|u - v\|$.

Отклонением непустого множества $U \subseteq \mathbb{R}^m$ от непустого множества $V \subseteq \mathbb{R}^m$ назовем величину:

$$d(U, V) = \sup_{u \in U} \rho(u, V).$$

Отклонение $d(U, V)$ не является симметричным относительно перестановки аргументов, так как величины $d(U, V)$ и $d(V, U)$, вообще говоря, отличаются. Введем симметричное *расстояние Хаусдорфа* между двумя непустыми подмножествами U и V пространства $\mathbb{R}^m$:

$$d_H(U, V) = \max\left(d(U, V), d(U, V)\right).$$

Легко доказать следующее утверждение, проиллюстрированное на Рис. 1.[2]

Теорема 1. *При сделанных предположениях относительно множества Y справедливы следующие утверждения, связывающие оболочки Эджворта-Парето множества ε-Парето и множества достижимых критериальных векторов:*

$$NE(Y_\varepsilon) \subseteq NE(\mathcal{P}(Y)) = NE(Y) \subseteq NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m), \tag{9}$$

$$d_H(NE(Y_\varepsilon), NE(Y)) \leqslant d_H(NE(Y_\varepsilon), NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)) \leqslant \varepsilon, \tag{10}$$

$$d_H(NE(Y), NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)) \leqslant d_H(NE(Y_\varepsilon), NE(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)) \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

[2]Идея использования оболочки Эджворта-Парето при решении многокритериальных задач принадлежит А.В. Лотову [22]

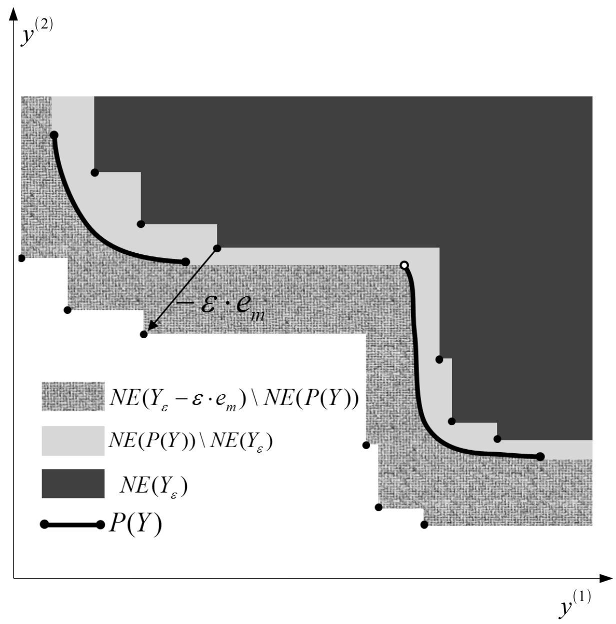

Рис. 1. Иллюстрация теоремы 1

Доказательство этих утверждений очевидно.

Содержательно теорема 1 означает, что при стремлении ε к нулю, множества $\mathrm{NE}(Y_\varepsilon)$ и $\mathrm{NE}(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)$ стремятся (в метрике Хаусдорфа) к оболочке Эджворта-Парето $\mathrm{NE}(Y)$ множества достижимых критериальных векторов изнутри и снаружи множества Y (Рис. 2). При этом множество $\mathcal{P}(Y)$ заключено между множествами $\mathrm{NE}(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m)$ и $\mathrm{NE}(Y_\varepsilon)$, т.е. $\mathcal{P}(Y) \in (\mathrm{NE}(Y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m) \setminus \mathrm{NE}(Y_\varepsilon)) \cup Y_\varepsilon$.

Установим теперь связь между ε-Парето множеством и множеством Парето для задачи (1).

Лемма 2. *Пусть $y_* \in \mathcal{P}(Y)$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что для ε-Парето множества Y_ε выполняется неравенство*

$$\rho(y_*, Y_\varepsilon) \leqslant \delta. \tag{12}$$

Доказательство. Рассмотрим стремящуюся к нулю монотонно убывающую последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда для любого k существует ε_k-Парето множество Y_{ε_k}, такое что $\rho(y_*, Y_{\varepsilon_k}) > \delta$. По определению ε-Парето множества найдется точка $y_k \in Y_{\varepsilon_k}$ такая, что $y_k - \varepsilon_k \cdot e_m \leqslant y_*$. В силу компактности множества Y без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{y_k\}$ сходится к точке $y \in Y$. Так как $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ и $y_k - \varepsilon_k \cdot e_m \leqslant y_*$, то $y \leqslant y_*$. Так как $\rho(y_*, Y_{\varepsilon_k}) > \delta$ для каждого k, то $\rho(y_*, y) \geqslant \delta$ и, следовательно, $y_* \neq y$. Но это противоречит тому, что y_* принадлежит $\mathcal{P}(Y)$. $\square$

Приведем определение из [23]. Пусть $\varepsilon > 0$ — заданное положительное число. Множество $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ называется *ε-сетью* для множества $Y \subseteq \mathbb{R}^m$, если для каждой точки $y \in Y$ найдется такая точка z из Ω, что $\|y - z\| \leqslant \varepsilon$.

Теорема 2. *Для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что любое множество ε-Парето Y_ε образует δ-сеть для множества $\mathcal{P}(Y)$.*

Доказательство. Очевидно, что множество Y_ε образует ε-сеть множества $\mathcal{P}(Y)$ тогда и только тогда, когда

$$d(\mathcal{P}(Y), Y_\varepsilon) \leqslant \delta.$$

Рассмотрим стремящуюся к нулю монотонную последовательность $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда для любого k существует ε_k-Парето множество Y_{ε_k}, такое что $d(\mathcal{P}(Y), Y_{\varepsilon_k}) > \delta$. Это означает существование точки $y_k \in \mathcal{P}(Y)$, такой что $\rho(y_k, Y_{\varepsilon_k}) > \delta$. В силу компактности множества Y без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{y_k\}$ сходится к некоторой точке $y \in Y$. Пусть K — такое натуральное число, что $\|y_i - y\| \leqslant \delta/3$ при $i \geqslant K$.

Согласно Лемме 2 найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого ε-Парето множеств Y_ε справедливо $\rho(y_K, Y_\varepsilon) \leqslant \delta/3$. Пусть N — такое целое число, не меньшее K, что $\varepsilon_N \leqslant \varepsilon$. Согласно предположению, $\rho(y_N, Y_{\varepsilon_N}) > \delta$. С другой стороны, поскольку Y_{ε_N} является ε-Парето множеством, то $\rho(y_K, Y_{\varepsilon_N}) \leqslant \delta/3$. Следовательно найдется точка $u \in Y_{\varepsilon_N}$, такая что $\|u - y_K\| \leqslant \delta/3$. Согласно свойствам нормы имеем: $\|u - y_N\| \leqslant \|u - y_K\| + \|y_K - y\| + \|y - y_N\| \leqslant \delta$. Пришли к противоречию с неравенством $\rho(y_N, Y_{\varepsilon_N}) > \delta$ и тем самым теорема доказана. $\square$

Теорема 2 не устанавливает связь между ϵ и δ. Такую связь можно установить для точек, оптимальных по Джоффриону. Введем обозначение для множества индексов критериев $M = \{1, ..., m\}$. Согласно [3], точка $y_* \in \mathcal{P}(Y)$ называется *оптимальной по Джоффриону*, если существует такое положительное число $\theta(y_*)$, что для всех точек $y \in Y$ справедливо следующее: если $y^{(i)} < y_*^{(i)}$, то найдется $j \in M$, такое что $y^{(j)} > y_*^{(j)}$, причем

$$\frac{y_*^{(i)} - y^{(i)}}{y^{(j)} - y_*^{(j)}} \leqslant \theta(y_*). \tag{13}$$

Утверждение 2. *Если точка y_* оптимальна по Джоффриону, то для любого ε-Парето множества Y_ε при $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\rho(y_*, Y_\varepsilon) \leqslant \varepsilon\sqrt{m}\max(1, \theta(y_*)). \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ и Y_ε — ε-Парето множество. По определению ε-Парето множества найдется такая точка $y_\varepsilon \in Y_\varepsilon$, что $y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m \leqslant y_*$. Определим два подмножества M_+ и M_- множества M:

$$M_+ = \{i \in M : y_*^{(i)} > y_\varepsilon^{(i)}\},$$
$$M_- = \{i \in M : y_*^{(i)} \leqslant y_\varepsilon^{(i)}\}.$$

Очевидно $M = M_+ \cup M_-$. Так как $y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m \leqslant y_*$, то для любого $i \in M_-$ справедливо $0 \leqslant y_\varepsilon^{(i)} - y_*^{(i)} \leqslant \varepsilon$. Так как y оптимальна по Джоффриону, то для любого $i \in M_+$ найдется такое $j \in M_-$, что

$$\frac{y_*^{(i)} - y_\varepsilon^{(i)}}{y_\varepsilon^{(j)} - y_*^{(j)}} \leqslant \theta(y_*).$$

Следовательно при $i \in M_+$ выполняется

$$0 \leqslant y_*^{(i)} - y_\varepsilon^{(i)} \leqslant \theta(y_*)(y_\varepsilon^{(j)} - y_*^{(j)}) \leqslant \theta(y_*)\varepsilon.$$

Таким образом для всех $i \in M$ справедливо $|y_\varepsilon^{(i)} - y_*^{(i)}| \leqslant \delta$, где $\delta = \max(\varepsilon, \theta(y_*)\varepsilon)$. По определению евклидовой метрики получаем утверждение теоремы.$\square$

Утверждение 2 позволяет оценить сверху точность аппроксимации, которую дает ε-Парето множества, используя величину $\theta(y)$. Рассмотрим задачу (2), в которой критерии и допустимое множество определены следующим образом

$$\begin{aligned} &f^{(1)}(x) = x^{(1)} \\ &f^{(2)}(x) = (x^{(1)} - 1)^2 + x^{(2)}, \\ &0 \leqslant x^{(1)} \leqslant 1, \\ &0 \leqslant x^{(2)} \leqslant 1. \end{aligned} \tag{15}$$

На Рис. 2 жирной линией изображено множество Парето. Это множество в пространстве критериев задается участком кривой $y^{(2)} = (y^{(1)} - 1)^2$. Все точки этого множества являются оптимальными по Джоффриону, кроме точки $y_0 = (1, 0)$. При этом

$$\theta(y_*) = \max\left(2(1 - y^{(1)}), \frac{1}{2(1 - y^{(1)})}\right),$$

где $y_* = (y^{(1)}, (y^{(1)} - 1)^2)$.

Набор точек, отмеченных на рисунке, составляет ε-Парето множество, полученное с помощью метода неравномерных покрытий, при $\varepsilon = 0.05$. Видно, что точность аппроксимации в окрестности точки y_0, при приближении к которой $\theta(y_*)$ неограниченно растет, ниже, чем в других точках. Это свойство соответствует оценке (14). Максимальная плотность точек ε-Парето множества наблюдается в центральной части графика, где значение $\theta(y_*)$ минимально.

Также можно получить количественную оценку точности дискретной аппроксимации на заданном отрезке, содержащем только джеффрионовские точки. Например, на отрезке $f^{(1)} \in [0, 1/2]$ параметр $\theta(y_*)$ не превосходит 2. Следовательно расстояние от любой точки множества Парето на этом участке до ближайшей точки множества ε-Парето не превосходит $2\sqrt{2}\varepsilon$.

4. Поиск приближенного решения многокритериальной задачи

4.1. Общая теория

Напомним основную идею метода неравномерных покрытий для задач с одним критерием. Для непрерывной скалярной функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ставится задача отыскания глобального минимума на компактном *допустимом множестве* $X \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$f_* = glob \min_{x \in X} f(x) = f(x_*), \tag{16}$$

где x_* — любая точка, в которой достигается глобальный минимум, равный f_*. Для этой задачи определим множество *глобальных решений* X_* и множество *ε-оптимальных решений* X_ε:

$$X_* = \{x \in X : f(x) = f_*\}, X_\varepsilon = \{x_\varepsilon \in X : f(x_\varepsilon) \leqslant f_* + \varepsilon\}, \varepsilon > 0. \tag{17}$$

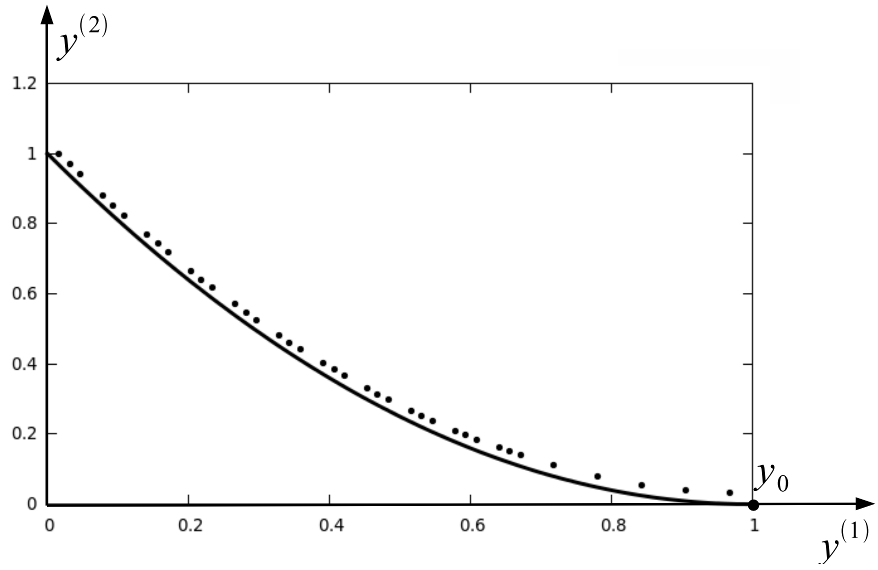

Рис. 2. Демонстрационный пример для теоремы 2

Предполагаем, что множество X_* не пусто. Для приближенного решения задачи (16) достаточно найти хотя бы одну точку x_ε из множества X_ε. Тогда величина $f(x_\varepsilon)$ будет превосходить f_* не более чем на ε.

Для функции $f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, множества $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ определим *Лебеговское множество*

(18) $$\mathcal{L}(f(\cdot), \Omega, \lambda) = \{x \in \Omega : f(x) \geqslant \lambda\}.$$

Используя понятие лебеговского множества, можно определить необходимые и достаточные условия глобальной оптимальности точки $x_* \in X$ следующим образом: $x_* \in X_* \Leftrightarrow \mathcal{L}(f(\cdot), X, f(x_*)) = X$.

Аналогично записывается критерий глобальной ε-оптимальности. Пусть $x_\varepsilon \in X$, тогда

(19) $$x_\varepsilon \in X_\varepsilon \Leftrightarrow \mathcal{L}(f(\cdot), X, f(x_\varepsilon) - \varepsilon) = X.$$

Перейдем теперь к рассмотрению случая m-критериев, когда $m > 1$. Для произвольных множеств $\Lambda \subseteq Y$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ и вектор-функции $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определим *Лебеговское множество*

(20) $$\mathcal{L}(F(\cdot), \Omega, \Lambda) = \{x \in \Omega : F(x) \in \mathrm{NE}(\Lambda)\}.$$

В случае $m = 1$ это определение совпадает с (18).

Введенное понятие можно использовать для альтернативного определения Парето множества. Пусть $\Theta \subseteq Y$ и $\mathcal{P}(\Theta) = \Theta$ тогда

(21) $$\Theta = \mathcal{P}(Y) \Leftrightarrow L(F(\cdot), X, \Theta) = X.$$

Критерий глобальной ε-оптимальности имеет следующий вид. Пусть $\Theta \subseteq Y$ и $\mathcal{P}(\Theta) = \Theta$ тогда

(22) $$\Theta \text{ есть } \varepsilon - \text{Парето множество} \Leftrightarrow L(F(\cdot), X, \Theta - \varepsilon \cdot e_m) = X.$$

Рассмотрим набор $X_1, \dots, X_k$, $X_i \subseteq X$ подмножеств допустимого множества и совокупность конечных подмножеств множества достижимых критериальных векторов $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$, $\Lambda_i \subseteq Y$. Пусть $\mu_i(\cdot)$ — миноранта для вектор-функции $F(\cdot)$ на множестве X_i т.е. $\mu_i(x) \leqslant F(x)$ для каждого $x \in X_i$. Пусть задана совокупность подмножеств $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_k$ множества X, удовлетворяющих для заданных $X_i, \Lambda_i, \mu_i(\cdot)$ соотношениям:

$$\mathcal{L}_i \subseteq \mathcal{L}(\mu_i(\cdot), X_i, \Lambda_i - \varepsilon \cdot e_m), i = 1, \dots, k, \tag{23}$$

где $\Lambda_i - \varepsilon \cdot e_m = \{x : x = \lambda - \varepsilon \cdot e_m$ для некоторого $\lambda \in \Lambda_i\}$.

Будем говорить, что совокупность множеств $\{\mathcal{L}_i\}$ *покрывает множество* X, если

$$X = \cup_{i=1}^{k} \mathcal{L}_i. \tag{24}$$

В этом случае объединение множеств $\mathcal{L}_i$ будем называть *покрывающими.*

Теорема 3. *Если выполнено условие покрытия (24), то множество* $Y_k = \mathcal{P}\left(\cup_{i=1}^{k} \Lambda_i\right)$ *является* ε*-Парето множеством для задачи (1).*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $y_* \in \mathcal{P}(Y)$, $y_* = F(x_*)$, $x_* \in X$. Если выполнено условие покрытия, то $x_* \in \mathcal{L}(\mu_i(\cdot), X_i, \Lambda_i - \varepsilon)$ для некоторого $i, 1 \leqslant i \leqslant k$. Следовательно найдется вектор $\lambda_i \in \Lambda_i$, такое что $\lambda_i - \varepsilon \cdot e_m \leqslant \mu_i(x_*) \leqslant F(x_*)$. Так как $Y_k = \mathcal{P}\left(\cup_{i=1}^{k} \Lambda_i\right)$, то найдется $y_\varepsilon \in Y_k$ такое, что $y_\varepsilon \leqslant \lambda_i$. Отсюда следует, что $y_\varepsilon - \varepsilon \cdot e_m \leqslant \lambda_i - \varepsilon \cdot e_m \leqslant F(x_*) = y_*$. В силу произвольности выбора $y_* \in \mathcal{P}(Y)$ установлена справедливость условия (5). Условие (6) следует из свойства (3). □

В процессе выполнения метод неравномерных покрытий строит множество Y_k и покрывающие множества $\{\mathcal{L}_i\}$, удовлетворяющие условиям теоремы 3. Эти способы будут подробно рассмотрены в дальнейшем.

4.2. Нахождение множества $\mathcal{L}_i$

Нахождение непустого множества $\mathcal{L}_i$ непосредственно из определения (23) является достаточно сложной задачей, которую можно упростить, используя следующее очевидное соотношение:

$$\mathcal{L}(\mu_i(\cdot), X_i, \Lambda_i - \varepsilon \cdot e_m) = \cup_{\lambda \in \Lambda_i} \mathcal{L}(\mu_i(\cdot), X_i, \lambda - \varepsilon \cdot e_m), \tag{25}$$

где $\mathcal{L}(\mu_i(\cdot), X_i, \lambda - \varepsilon \cdot e_m) = \{x \in X_i : \mu_i(x) \geqslant \lambda - \varepsilon \cdot e_m\}$. Из соотношения (25) следует, что множество $\mathcal{L}_i$ можно искать в виде объединения:

$$\mathcal{L}_i = \cup_{\lambda \in \Lambda_i} \mathcal{L}_i^{\lambda}, \tag{26}$$

где $\mathcal{L}_i^{\lambda} \subseteq \mathcal{L}(\mu_i(\cdot), X_i, \lambda - \varepsilon \cdot e_m)$. Множества $\mathcal{L}_i^{\lambda}$ находятся проще чем $\mathcal{L}_i$. Укажем два способа нахождения множества $\mathcal{L}_i^{\lambda}$

1. Пусть $\mu_i(\cdot)$ — произвольная миноранта для вектор-функции $F(\cdot)$ на множестве X_i. Пусть также для каждого $j \in M$ известен способ определения минимума $\alpha_i^{(j)}$ функций $\mu_i^{(j)}(\cdot)$, на множестве X_i, $\alpha_i = (\alpha_i^{(1)}, \dots, \alpha_i^{(m)})$. Положим

$$\mathcal{L}_i^{\lambda} = \begin{cases} X_i, \text{ если } \alpha_i \geqslant \lambda - \varepsilon \cdot e_m, \\ \emptyset \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда согласно (26)

$$\mathcal{L}_i = \begin{cases} X_i, \text{ если найдется такое } \lambda \in \Lambda_i \text{ что } \alpha_i \geqslant \lambda - \varepsilon \cdot e_m, \\ \emptyset \text{ в противном случае .} \end{cases} \tag{27}$$

Этот способ построения множества $\mathcal{L}_i$ удобно применять в случае, когда минимум миноранты $\mu_i^{(j)}$ на множестве X_i легко находится.

2. Пусть $\mu_i(\cdot)$ — произвольная миноранта для вектор-функции $F(\cdot)$ на множестве X_i и для каждого индекса j, $1 \leqslant j \leqslant m$ известен способ определения множества $K_i^j \subseteq \mathcal{L}(\mu_i^{(j)}(\cdot), X_i, \lambda^{(j)} - \varepsilon)$. Тогда положим

$$\mathcal{L}_i^{\lambda} = \cap_{j=1}^{m} K_i^j. \tag{28}$$

В дальнейшем будут использоваться следующие две миноранты.

Если функция $f^{(j)}(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой l_i^j на множестве X_i, то согласно [11] следующая функция будет минорантой для функции $f(x)$:

$$\mu_i^{(j)}(x) = f^{(j)}(c_i) - l_i^j \|x - c_i\|, \tag{29}$$

где $c_i \in X_i$. В работе [8] был рассмотрен только этот случай.

Если градиент $f_x^{(j)}(\cdot)$ дифференцируемой функции $f^{(j)}(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с константой l_i^j, то применяется следующая миноранта [17]:

$$\mu_i^{(j)}(x) = f^{(j)}(c_i) + \langle f_x^{(j)}(c_i), x - c_i \rangle - \frac{l_i^j}{2} \|x - c_i\|^2. \tag{30}$$

Значения минорант (29), (30) в точке c_i совпадают со значением минорируемого критерия $f^{(j)}(\cdot)$ в этой точке. Поэтому эти миноранты называют *опорными*, а точку c_i — *опорной точкой.*

На практике множество X_i, как правило, является n-мерным параллелепипедом. Существуют аналитические формулы для нахождения минимума введенных минорант на n-мерном параллелепипеде. Поэтому применение правила (27) для нахождения множества $\mathcal{L}_i$ не вызывает проблем.

Для миноранты (29) множество $\mathcal{L}(\mu_i^{(j)}(\cdot), X_i, \lambda^{(j)} - \varepsilon)$ является пересечением шара радиуса $\rho_i^j(\lambda) = (f^{(j)}(c_i) - \lambda^{(j)} + \varepsilon)/l_i^j$ с центром в точке c_i и множества X_i. В работе [8] рассмотрен случай, когда миноранты вида (29) имеют одну и ту же опорную точку c_i для всех критериев. При этом множество K_i^j полагается равным Лебеговскому множеству, т.е. определяется как пересечение шара $B(c_i, \rho_i^j(\lambda))$ и множества X_i. Тогда:

$$\mathcal{L}_i^{\lambda} = B(c_i, \rho_i(\lambda)) \cap X_i,$$

где $\rho_i(\lambda) = \min_{1 \leqslant j \leqslant M} \rho_i^j(\lambda)$, а

$$\mathcal{L}_i = B(c_i, \rho_i) \cap X_i, \tag{31}$$

где $\rho_i = \max_{\lambda \in \Lambda_i} \rho_i(\lambda)$.

Таким образом

$$\rho_i = \max_{\lambda \in \Lambda_i} \min_{1 \leqslant j \leqslant M} (f^{(j)}(c_i) - \lambda^{(j)} + \varepsilon)/l_i^j.$$

Данная формула с точностью до обозначений совпадает с формулой (3) из работы [8].

Для миноранты (30) множество $\mathcal{L}(\mu_i^{(j)}(\cdot), X_i, \lambda^{(j)} - \varepsilon)$ является пересечением множества X_i и шара радиуса

$$\rho_i^j(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{l_i^j}\left(\frac{1}{2l_i^j}\|f_x^{(j)}(c_i)\|^2 + f(c_i) - \lambda^{(j)} + \varepsilon\right)}$$

с центром в точке $z_i = c_i + f_x^{(j)}/l_i^j$.

В этом случае подход, примененный для миноранты (29), не работает, т.к. шары имеют различные центры и их пересечение является сложной фигурой, с трудом поддающейся алгоритмической обработке. Рассмотрим два возможных варианта решения этой задачи.

Первый вариант основан на том, что множество $\mathcal{L}(\mu_i^{(j)}(\cdot), X_i, \lambda^{(j)} - \varepsilon)$ содержит шар радиуса

$$\rho_i^j(\lambda) = \left(\sqrt{\|f_x^{(j)}(c_i)\|^2 + 2l_i^j(f^{(j)}(c_i) - \lambda^{(j)} - \varepsilon)} - \|f_x^{(j)}(c_i)\|\right)/l_i^j \tag{32}$$

с центром в точке c_i. Полагая, что множество K_i^j есть пересечение этого шара со множеством X_i и проводя рассуждения, аналогичные проведенным для миноранты (29), получаем что множество $\mathcal{L}_i$ может быть вычислено по формуле (31), где $\rho_i^j(\lambda)$ вычисляются по формуле (32).

Во втором варианте в качестве множеств K_i^j берутся n-мерные параллелепипеды, принадлежащие множеству $\mathcal{L}(\mu_i^{(j)}(\cdot), X_i, \lambda^{(j)} - \varepsilon)$. Способ нахождения такого параллелепипеда указан в работе [20]. Множество $\mathcal{L}_i^\lambda$ будет пересечением параллелепипедов, а следовательно, тоже параллелепипедом. Множество $\mathcal{L}_i$ представляет собой объединение параллелепипедов, которое удобно использовать в алгоритмах.

4.3. Алгоритм

Рассмотрим одну из возможных реализаций метода неравномерных покрытий.

Важнейшей частью предлагаемого алгоритма является построение множества Y_k. Для построения множества Y_k в процессе работы алгоритма поддерживается список A точек из допустимого множества X такой, что образ $F(A)$ множества A при отображении F содержит конечный набор попарно несравнимых точек, который после завершения работы алгоритма будет множеством Y_k. Значения критериев хранятся вместе со значениями параметров. Это позволяет избежать повторного вычисления значений критериев каждый раз при проведении сравнения.

Список A строится последовательно с использованием процедуры **Update**, реализующей добавление очередной точки ко множеству A.

Процедура Update (A, x)
Параметры:
A — текущий список точек;
x — новая точка;

1) Для каждой точки a из A выполнить следующие действия:

   если $F(a) \leqslant F(x)$, то завершить процедуру;

   если $F(x) \leqslant F(a)$, то удалить a из A;

2) Добавить x в A.

Очевидно, образ $F(A)$ множества A, построенного при помощи данной процедуры, удовлетворяет условию (6). Последовательность добавляемых точек может генерироваться различными способами, более подробно рассматриваемыми при описании всего алгоритма.

Улучшить точность аппроксимации и ускорить работу алгоритма **Cover** позволяют методы локальной оптимизации, т.е. методы, позволяющие по точке $x \in X$ получить точку $x' \in X$, такую что $F(x') \leqslant F(x)$. Эта процедура применяется к точкам x до добавления их к списку A (см. [12–14]).

Перейдем к рассмотрению основного алгоритма **Cover**, который последовательно разбивает допустимое множество X на подмножества, формирует и отбрасывает множества $\mathcal{L}_i$ до тех пор, пока они не образуют покрытие допустимого множества. В процессе работы алгоритма строится список допустимых точек A.

Алгоритм Cover

1) Инициализировать список подмножеств $S = \{X\}$ и список точек $A = \emptyset$.

2) Взять из списка S некоторое множество, которое обозначается X_i.

3) Выбрать точку $c_i \in X_i$ и обновить список точек A: $\mathrm{Update}(A, c_i)$.

4) Определить множество $\mathcal{L}_i$ и его дополнение $X_i' : X_i' = X_i \setminus \mathcal{L}_i$.

5) Если $X_i' \neq \emptyset$, то разбить X_i' на p подмножеств $\mathcal{Y}_i = \{Y_1^i, \ldots, Y_p^i\}$ и добавить их в список S.

6) Удалить X_i из списка S.

7) Если список S пуст, то завершить работу алгоритма, в противном случае перейти к шагу 2.

Применив теорему 3, легко показать, что после завершения работы алгоритма, множество A является ε-оптимальным решением, а множество $f(A)$ — ε-Парето множеством для задачи (1).

Для проведения экспериментов был реализован вариант приведенного алгоритма, обладающий следующими особенностями:

- предполагается, что допустимое множество — параллелепипед и все множества X_i — также параллелепипеды;

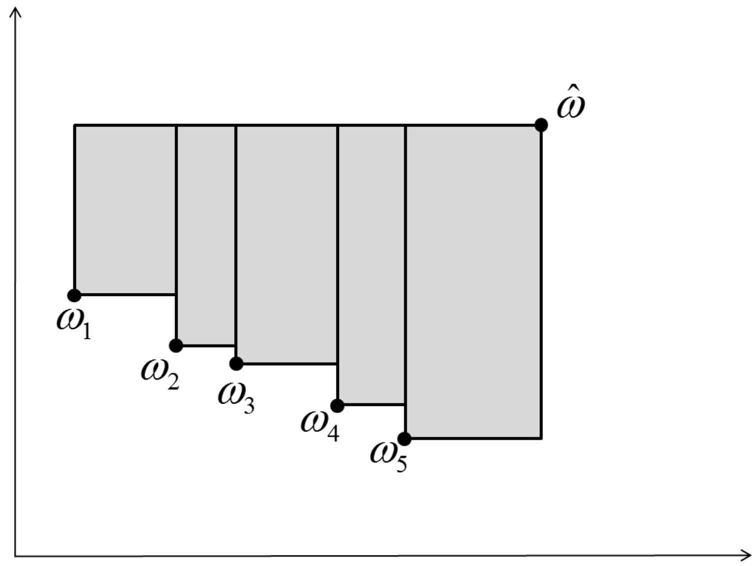

Рис. 3. Показатель Hyper Volume (HV)

- параллелепипед X_i' всегда разбивается на два равных параллелепипеда гиперплоскостью, проходящей перпендикулярно ребру максимальной длины через его середину;
- в качестве точки c_i всегда берется центр параллелепипеда X_i.

5. Результаты экспериментов

При сравнении алгоритмов поиска минимума скалярной функции лучшим считается алгоритм, нашедший допустимое решение с наименьшим значением целевой функции. Сравнение различных алгоритмов многокритериальной оптимизации является более сложной задачей, так как здесь нет возможности выделить единый параметр, по которому проводится сравнение. Подробный обзор различных методик сравнения приближенных решений многокритериальных задач, можно найти в работе [24]. В дальнейшем используем два количественных показателя из числа предложенных в ней.

Первый показатель носит название Hyper Volume (HV) и измеряет общий объем области, образованной объединением перекрывающихся параллелепипедов, расположенных между некоторой заданной (*референсной*) точкой и точками дискретной аппроксимации (Рис. 3). В качестве референсной обычно берется точка r такая, что $r^{(i)} \geqslant \max_{x \in X} f^{(i)}(x)$, $i = 1, \ldots, m$. Заметим, что нахождение референсной точки не всегда является тривиальной задачей. Если A и A' — две аппроксимации множества Парето, причем $A' \leqslant A$, то для одной и той же референсной точки значение показателя HV для A' будет больше, чем у A. Другими словами, большие значения показателя HV обычно соответствуют более точным аппроксимациям.

Помимо близости к истинному множеству Парето качество полученной аппроксимации также характеризуется равномерностью распределения точек в ней. При одинаковом числе точек предпочтительнее аппроксимация, в которой точки распределены более равномерно. Следующий показатель (33) позволяет грубо оценить равномерность этого распределения. Для аппроксимации A, содержащей k точек, определим

$$\mathrm{UD}(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(d_i - d)^2}, \quad d = \left(\sum_{i=1}^{k} d_i\right)/k, \tag{33}$$

где d_i — минимальное расстояние от точки с номером i до остальных точек из A. Меньшие значения данного показателя как правило соответствуют более равномерным распределениям точек. В частности, если все минимальные расстояния одинаковы, то показатель принимает нулевое значение. Заметим, что показатель (33) не содержателен для задач, в которых множество Парето несвязно.

В экспериментах проводилось сравнение трех алгоритмов:

1) NUC: метод неравномерных покрытий;
2) MC: метод “Монте-Карло” — стохастический алгоритм , при котором случайные точки равномерно распределены в допустимой области, а дискретная аппроксимация строится с помощью процедуры **Update**;
3) SEMO: генетический алгоритм SEMO из библиотеки PISA [25].

При проведении сравнения измерялись значения следующих параметров:

1) nit — число вызовов функций, вычисляющих критерии;
2) ε — точность, данный параметр имеет смысл только для метода неравномерных покрытий и определяет значение ε для получаемого множества ε-Парето;
3) ngen — число поколений, данный параметр имеет смысл только для генетического алгоритма;
4) np — число точек в дискретной аппроксимации;
5) hv — значение показателя Hyper Volume;
6) ud — значение показателя равномерности распределения точек в аппроксимации.

Для проведения сравнения рассмотрим два примера.

Пример 1. Рассмотрим задачу (1) где критерии задаются формулами

$$f^{(1)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = x^{(1)}, \ f^{(2)}(x^{(1)}, x^{(2)}) = \min(|x^{(1)} - 1|, 1.5 - x^{(1)}) + x^{(2)} + 1,$$

а допустимая область определяется неравенствами $0 \leqslant x^{(1)} \leqslant 2, 0 \leqslant x^{(2)} \leqslant 2$.

Граница Парето в данном примере состоит из двух отрезков. Первый соединяет точки $(0, 2)$ и $(1, 1)$, а второй — точки $(1.5, 1)$ и $(2, 0.5)$.

Параметры трех алгоритмов выбирались таким образом, чтобы обеспечить примерно одинаковое число вычислений критериев, близкое к 500. В таблице 1 приведены результаты экспериментов для различных алгоритмов. Прочерк в таблице означает, что параметр не имеет смысла для данного метода. Показатель равномерности не вычислялся, поскольку множество Парето несвязно.

На Рис. 4 показаны дискретные аппроксимации множества Парето, полученные различными методами SEMO, MC, NUC для примера 1. Визуально видно, что качество

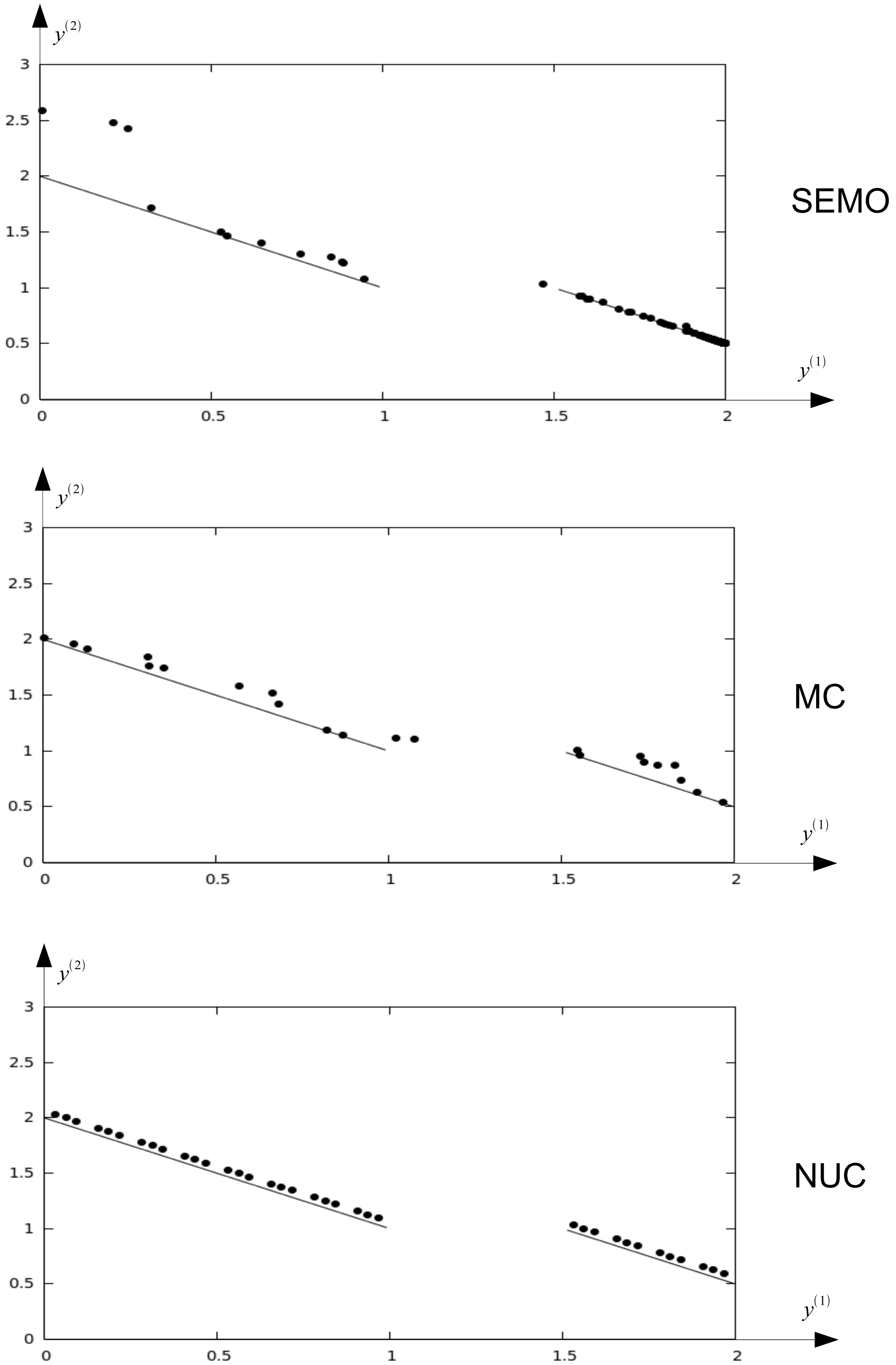

Рис. 4. Аппроксимации множества Парето, полученные различными методами для примера 1

Таблица 1. Сравнительные результаты работы различных алгоритмов для примера 1

Метод	nit	ε	ngen	np	hv
SEMO	500	-	500	221	3.27
MC	500	-	-	22	3.38
NUC	490	0.07	-	36	3.42

Таблица 2. Сравнительные результаты работы различных алгоритмов для примера 2

Метод	nit	ε	ngen	np	hv	ud
SEMO	500	-	500	104	0.312	1.116
MC	500	-	-	67	0.300	1.277
NUC	515	0.0675	-	29	0.306	0.210

аппроксимации метода неравномерных покрытий существенно выше чем у двух других методов.

Пример 2. В данном примере решается задача (1), в которой критерии задаются формулами:

$$f^{(1)}(x) = (x^{(1)} - 1) \cdot (x^{(2)})^2 + 1, f^{(2)}(x) = x^{(2)}.$$

Допустимая область определяется неравенствами $0 \leqslant x^{(1)} \leqslant 1, 0 \leqslant x^{(2)} \leqslant 1$.

Несложно убедиться, что решением данной задачи в пространстве критериев будет участок параболы $y^{(1)} = 1 - (y^{(2)})^2$ при $y^{(1)}, y^{(2)} \in [0, 1]$. Задача невыпукла. Также как и в предыдущем примере параметры трех алгоритмов выбирались таким образом, чтобы обеспечить примерно одинаковое число вычислений критериев, близкое к 500. В таблице 2 приведены результаты экспериментов для различных алгоритмов. На Рис. 5 показаны дискретные аппроксимации множества Парето, полученные различными методами SEMO, MC, NUC для примера 2.

Анализ данных таблицы 2 и графиков на Рис. 5 показывает, что по показателю Hyper Volume метод неравномерных покрытий немного превзошел стохастический алгоритм и несколько уступил генетическому алгоритму. При этом, с помощью генетического алгоритма построена аппроксимация, содержащая в три с лишним раза больше точек по сравнению с методом неравномерных покрытий. Показатель ud, характеризующий равномерность распределения точек и визуальный анализ графиков показывают что точки, построенные методом неравномерных покрытий дают существенно более равномерное распределение.

Следует отметить, что в отличие от генетического и стохастического алгоритмов, метод неравномерных покрытий гарантирует ε-оптимальность для заданного ε.

6. Заключение

В работе предложен новый подход к аппроксимации множества Парето, основанный на идеях метода неравномерных покрытий. Данный подход обладает двумя основными достоинствами. Во-первых он позволяет построить множество ε-Парето для заданного ε, т.е. гарантирует ε-оптимальность аппроксимации. Эта особенность является уникальной и отсутствует в других подходах к решению задач многокритериальной оптимизации.

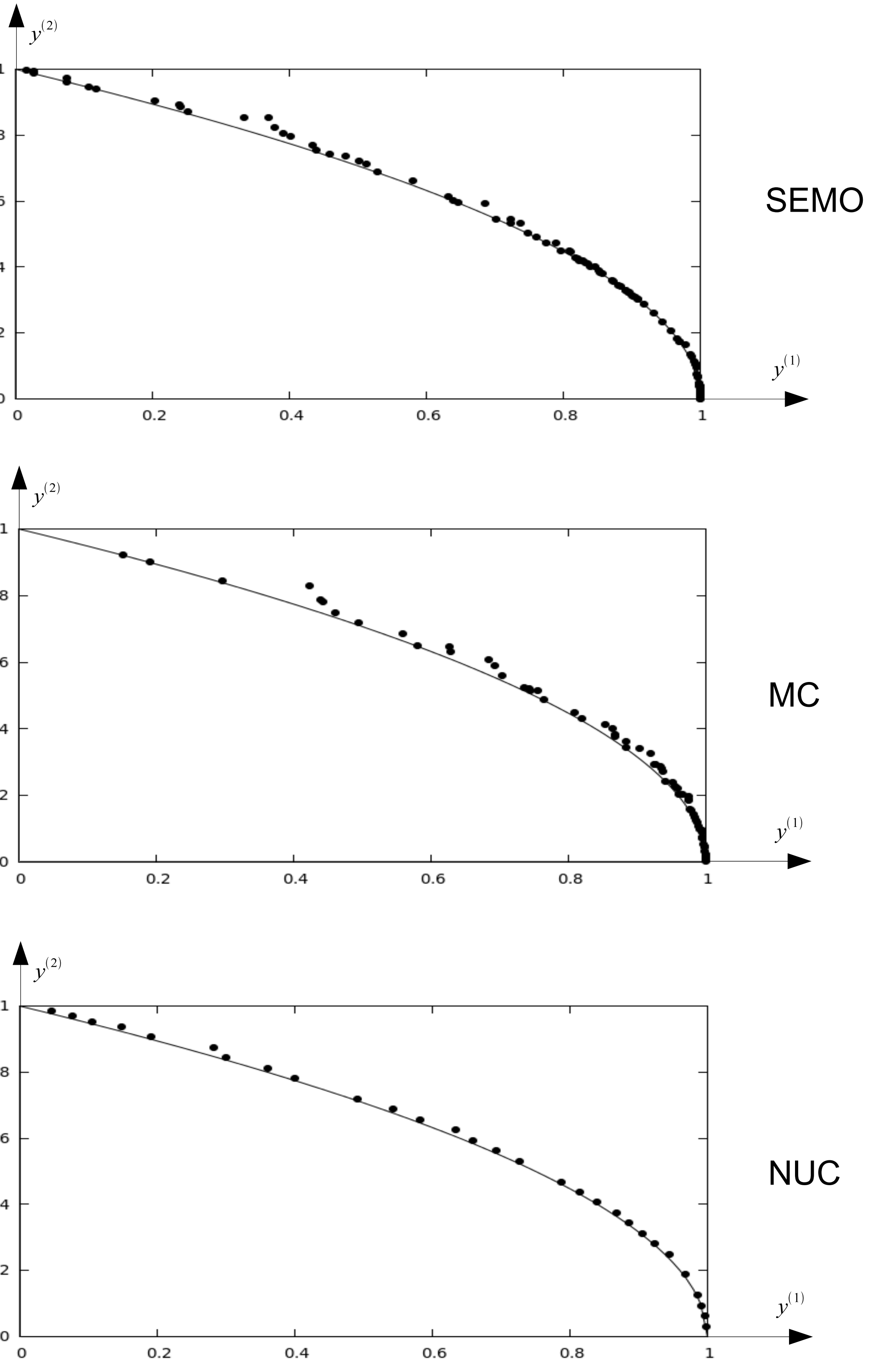

Рис. 5. Аппроксимации множества Парето, полученные различными методами для примера 2

Во вторых из экспериментов следует, что точки дискретной аппроксимации, полученные с помощью метода неравномерных покрытий, распределены более равномерно, по сравнению с аппроксимациями, полученными другими рассмотренными методами. Таким образом при той же мощности аппроксимационного множества, метод неравномерных покрытий позволяет получать более качественные аппроксимации, что является безусловным достоинством с точки зрения практики.

Авторы выражают благодарность А.В. Лотову за внимание к работе и ценные рекомендации по ее улучшению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Физматлит, 2007, 256с.

2. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. М.: Радио и связь, 1992.

3. А.В. Лотов, И.И. Поспелова, Многокритериальные задачи принятия решений, М.: МАКС-Пресс, 2008,200с.

4. Multi-objective Optimization - Interactive and Evolutionary Approaches, Springer LNCS 5252, Branke, J.; Deb, K.; Miettinen, K.; Slowinski, R. (Eds.), 470p. 2008.

5. Gass S., Saaty T. Parametric Objective Function Part II. Operations Research 3: 316-319, 1955

6. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Федоров В.В. Декомпозиция в задачах проектирования // Изв. АН СССР. Сер. Техн. Кибернетика. 1979. №2. С. 7-17.

7. Лотов А.В., Бушенков В.А., Каменев Г.К., Черных О.Л. Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей. М.: Наука, 1997.

8. Евтушенко Ю. Г., Потапов М. А. Методы численного решения многокритериальных задач. Доклады Академии наук СССР, Т. 291, N 1, 1986, С. 25-39.

9. Lotov A.V., Bushenkov V.A., Kamenev G.K. Interactive decision maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier. Boston: Kluwer, 2004.

10. Lotov A., Berezkin V., Kamenev G., Miettinen K. Optimal control of cooling process in continuous casting of steel using a visualization-based multi-criteria approach // Appl. Math. Modelling. 2005. V. 29. < 7. P. 653-672.

11. Евтушенко Ю.Г. Численный метод поиска глобального экстремума функций (перебор на неравномерной сетке) // ЖВМ и МФ, 1971. Т. 11, №6, С. 1390-1403.

12. Жадан В.Г. Метод параметризации целевых функций в условной многокритериальной оптимизации. ЖВМиМФ, Т. 26, №2, 1986, 177–189.

13. Жадан В.Г. Метод модифицированной функции Лагранжа для задач многокритериальной оптимизации, Т. 28, №11, 1988, 1603–1618.

14. А. С. Антипин, А. И. Голиков, Е. В. Хорошилова, “Функция чувствительности, ее свойства и приложения”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 51:12 (2011), 2126-2142

15. Karpenko A.P., Moor D.A., Mukhlisulina D.T. Multicriteria Optimization Based On Neural Network, Fuzzy And Neuro-Fuzzy Approximation Of Decision Maker’s Utility Function // Optical Memory and Neural Networks (Information Optics), 2012, Vol. 21, No. 1, pp. 1-10.

16. Евтушенко Ю.Г., Ратькин В.А. Метод половинных делений для глобальной оптимизации функции многих переменных. // Техническая кибернетика. 1987, №1, С. 119-127.

17. Ю. Г. Евтушенко, В. У. Малкова, А. А. Станевичюс. Распараллеливание процесса поиска глобального экстремума. Автоматика и телемеханика, №5., С. 46-58.

18. Y. Evtushenko, M. Posypkin, I. Sigal, A framework for parallel large-scale global optimization // Computer Science - Research and Development 23(3), pp. 211-215, 2009.

19. Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А. Варианты метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично-целочисленных нелинейных задач. // Доклады Академии Наук, 2011, Т. 437 (2), с. 168-172.

20. Ю. Г. Евтушенко, М. А. Посыпкин. Применение метода неравномерных покрытий для глобальной оптимизации частично целочисленных нелинейных задач. // ЖВМиМФ, 2011, том 51 (8), с. 1376-1389.

21. Карпенко А.П., Семинихин А.С., Черная Л.А. Метод приближенного построения границы области достижимости многосекционного робота-манипулятора. // Нука и образование, 01, 2011. http://technomag.edu.ru/doc/165078.html

22. Лотов А.В. Согласование экономических моделей с использованием множеств достижимости // Математические методы анализа взаимодействия отраслевых и региональных систем (под ред. Е.Л.Берлянда и С.Б.Барабаша). Новосибирск: Наука, 1983, стр. 36-44.

23. Л.В. Канторович, Г.П. Акилов, Функциональный анализ. БХВ-Петербург, 2004.

24. Zitzler, E., Knowles, J. and Thiele, L. Quality Assessment of Pareto Set Approximations. In Multi-objective Optimization - Interactive and Evolutionary Approaches, Springer LNCS 5252, pp.373-404, 2008.

25. S. Bleuler, M. Laumanns, L. Thiele, and E. Zitzler. PISA - A Platform and Programming Language Independent Interface for Search Algorithms. In C. M. Fonseca et al., editors, Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization (EMO 2003), volume 2632 of LNCS, pages 494-508, Berlin, Springer, 2003.