© 2012 г. Ю. В. МОРОЗОВ, канд. физ.-мат. наук
(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИ-ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ПРОТОКОЛА ПРИ УПРАВЛЕНИИ ГРУППОЙ АГЕНТОВ

Рассматривается задача управления группой, содержащей заданное число агентов, относящаяся к проблеме согласования характеристик. Модель агента описывается уравнением Лагранжа. Цель работы состоит в синтезе ограниченного квази-оптимального децентрализованного закона управления движением агентов, который позволяет выстраивать и поддерживать предписанную конфигурацию группы агентов. Построение формации должно завершено за конечное время. Во время движения рассматриваемая группа должна следовать за лидером, реальным или виртуальным. Каждый агент измеряет относительное положение и скорость своих соседей, информационные связи между агентами задаются орграфом коммуникаций. Орграф является остовным деревом, конфигурация которого не меняется во времени.

FORMATION CONTROL VIA QUASI-TIME OPTIONAL PROTOCOL / Yu.V. Morozov (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Profsoyuznaya 65, Moscow 117342, Russia, E-mail: tot1983@inbox.ru).

The problem of formation control is considered. The number of agents is known. The dynamics of the agent is described as a Lagrangian system. The quasi-time optimal decentralised control law is proposed for synchronization networked agents. Constraction of the formation is going to be completed in finit time. During the motion, the formation follows a leader, real or virtual. Every agent determines relative position and velocity of its neighbors links of which are set up by a time-stable directed tree.

1. Введение

Среди обилия работ по групповому управлению, достаточно сложно встретить статьи связанные с финитным временем, т.е. посвященные синтезу закона управления обеспечивающего конечность переходных процессов при образовании заданной формации. Напомним, что впервые оптимальный по быстродействию закон управления двумерным интегратором был синтезирован в работе [1]. И только в 2011 была найдена функция Ляпунова [3], обеспечивающая глобальную устойчивость при использовании данного закона управления для некоторого набора параметров. Управление движением механических систем данным законом управления можно встретить, например, в работе [5]. В данной книге авторы используют, предложенный ими же метод декомпозиции, который позволяет свести исходную задачу к некоторому числу независимых задач, каждая из которых решается одинаково. При этом, накладываются некоторые дополнительные ограничения на исходную систему, которые не всегда могут быть выполнены. Наиболее свежей работой, посвященной данной тематике, является статья [4]. В этой работе, авторы используют закон управления состоящий из двух знаковых функций, для приведения механических систем к консенсусу. В данной работе, предлагается использовать квази-оптимальный по быстродействию закон управления для создания формациии из механических систем, в частном случае двойных интеграторов. Кроме того, данная группировка должна синхронно двигаться за лидером.

2. Основной результат

Обозначим общее число агентов через n. Динамика каждого агента описывается уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T_i}{\partial q_i} = Q_i + \tau_i + \xi_i,\ \dot{q}_i = p_i, i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $q_i \in \mathbb{R}^m$ координаты агентов. Обобщенные силы состоят из управлений τ_i, подлежащих определению, $Q_i \in \mathbb{R}^m$ известных внешние и внутренние силы действующие на агента и вектор $\xi_i \in \mathbb{R}^m$, $\|\xi_i\| < \Xi$, которые задают случайное, ограниченное воздействие на каждого агента при этом считается, что максимальное Ξ известно каждому агенту. Кинетическая энергия T_i задана в виде квадратичной формы:

$$T_i = \frac{1}{2}\dot{q}_i^{\mathrm{T}} M_i(q_i)\dot{q}_i, i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $M_i(q_i) \in R^{m\times m}$, $M_i(q_i) \succ 0$. Здесь и далее знак $\succ$ означает положительную определенность матрицы. Предполагается, что управление каждого агента состоит из двух компонент $\tau_i = v_i + u_i$. Выберем $v_i = -Q_i - \frac{\partial T_i}{\partial q_i} + \frac{1}{2}\dot{q}_i^{\mathrm{T}}\frac{\partial M_i(q_i)}{\partial q_i}\dot{q}_i$ Подставляя (2), τ_i и v_i в (1) приходим к уравнению вида:

$$M_i(q_i)\dot{p}_i = u_i + \xi_i,\ \dot{q}_i = p_i + \xi_i, i = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Предположение 1. Движение лидера описывается той же моделью (3), что и другие агенты, а его управление точно известно и ограничено, т.е.

$$M_i(q_0)\dot{p}_0 = u_0(q_0, p_0),\ \dot{q}_0 = p_0,\ \|u_0\| < \bar{u}_0,\ \xi_0 = 0. \tag{4}$$

Будем искать закон управления в виде функции $u_i(q_{\mathcal{N}_i}, p_{\mathcal{N}_i}, q_0, p_0)$, где $\mathcal{N}_i$ дает число соседей i-го агента и определяется, исходя из заданной топологии группы

$$\mathcal{N}_i = \{j : a_{ij} > 0\} \tag{5}$$

где a_{ij} компоненты матрицы смежности некоторого орграфа $\mathcal{G}$, вершины которого соответствуют агентам, а ребра определяют потоки информации, т.е. доступность компонент вектора $w_i = (q_i, p_i)^{\mathrm{T}}$ для вычисления управления.

Предположение 2. Здесь и далее предполагается что, структура графа не меняется и известна заранее.

Рассмотрим закон управления в виде

$$u_i = -M(q_i)\alpha_i\Big(\sum_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}\mathrm{sign}(S_{ij}) + b_i\mathrm{sign}(S_{i0})\Big), \tag{6}$$

где $\alpha_i = \bar{u}_i/l_i$, $l_i = b_i + \sum\limits_{j\in\mathcal{N}_i} a_{ij}$, $S_{ij} = (p_i - p_j) + \beta(q_i - q_j)^{[0.5]}$, где $\beta < 2(\bar{\alpha} - \bar{C})$, $\bar{C} = M^*\Xi + \bar{u}_0$, $\bar{\alpha} = \min_{i=1,n}\{\alpha_i l_i\}$. Здесь и далее $s^{[a]} \doteq \mathrm{sign}(s)|s|^a$ обозначает знаковую степень числа s, где $\mathrm{sign}(s) = \begin{cases} 1 & , \quad s > 0 \\ -1 & , \quad s < 0 \\ [-1\ \ 1] & , \quad s = 0. \end{cases}$ Таким образом, замкнутая система будет дифференциальным включением, а решение будем понимать в смысле Филиппова [2].

Теорема 1. *Пусть движение агента описывается системой (3),замкнутой управлением (6), а лидер движется по траектории (4). Для матрицы $M(q_i)$ выполняется условие*

$$\alpha_i > M^*\Xi + \bar{u}_0, \tag{7}$$

где $M^* = \max\limits_{i=1,n} \|M^{-1}(q_i)\|$. Орграф $\mathcal{G}$ является деревом. Тогда за конечное время агенты выстраивают формацию, в которой относительное положение агентов определяется вектором Δ_i.

Доказательство теоремы 1. Обозначим желаемое положение агентов внутри формации и относительно лидера с помощью вектора $\Delta_i \in \mathbb{R}^m$. И введем вектор ошибок текущего положения и скорости относительно лидера следующим образом

$$z_i^q = q_i + \Delta_i - q_0, z_i^p = p_i - p_0, \ i \in \mathcal{J}_0, \tag{8}$$

где множество $\mathcal{J}_0$ содержит всех агентов, для которых в начальный момент времени доступна информация о лидере.

Перепишем систему в новых координатах для все агентов $i \in \mathcal{J}_0$

$$\ddot{z}_i^q = -\alpha_i \mathrm{sign}(S_{i0}) + M(q_i)^{-1}\xi_i - u_0(q_0, p_0). \tag{9}$$

Из теоремы 3 [3] следует глобальная устойчивость нулевого положения системы (9), если выполняется условие (7). Причем функция Ляпунова для этой системы имеет вид

$$V_i(z_i^q, z_i^p) = \begin{cases} v_i^2/4 & , \quad S_{i0} \neq 0 \\ 0 & , \quad S_{i0} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь

$$\begin{array}{l} v_i = \chi_i\sqrt{|\varphi_i|} - (z_i^p)^2/\tilde{\gamma}_i, \\ \tilde{\gamma}_i = -\bar{u}\mathrm{sign}(S_{i0}) + \gamma_i, \, \gamma_i = (M^*\Xi + \bar{u}_0)\mathrm{sign}(S_{i0}), \\ \varphi_i = z_i^q - (z_i^p)^2/\tilde{\gamma}_i, \chi_i = -\frac{\mathrm{sign}(\varphi_i)}{\tilde{\gamma}_i\sqrt{|1/\beta^2 - \mathrm{sign}(\phi_i)/2\tilde{\gamma}_i|}}. \end{array} \tag{11}$$

Кроме того справедлива оценка времени $t_0^* \leqslant t_r^0 + t_s^0$, где $t_r^0 = \max\limits_{i\in\mathcal{J}_0}(t_r^0)_i$, $(t_r^0)_i = 2\sqrt{V_i(z_i^q(0), z_i^p(0))}$, $t_s^0 = \max\limits_{i\in\mathcal{J}_0}(t_s^0)_i$, $(t_s^0)_i = 2\beta^{-1}\sqrt{z_i^q(0) + z_i^p(0)(t_r^0)_i + ((t_r^0)_i)^2(M^*\Xi + \bar{u}_0 - \alpha_i)\mathrm{sign}(S_{i0}(z_i^q(0), z_i^p(0)))}$, за которое решения $(q_i + \Delta_i, p_i)$ и (q_0, p_0) совпадут для все $i \in \mathcal{J}_0$. Пусть далее множество $\mathcal{J}_1$ содержит всех агентов, для которых доступна информация от агентов из $\mathcal{J}_0$. Как взаимодействуют между собой агенты на интервале времени $(0, t_0^*)$ ни как не влияет на результат, т.к. в силу конечности ускорений ни один агент не отдалится от другого на бесконечность за конечное время. При этом свойство сходимости глобально. Тогда для $t > t_0^*$ имеем закон управления для всех $k \in \mathcal{J}_1$

$$u_k = -\bar{u}\mathrm{sign}(S_k), S_k = z_k^p + \beta(z_k^q)^{[0.5]}, \tag{12}$$

т.к. к этому времени $q_j = q_0$, $p_j = p_0$ для любого $j \in \mathcal{J}_0$. Повторяем итерационно до тех пор пока не переберем всех агентов. В итоге получим последовательность времен $t_0^*, \ldots, t_J^*$, где J определяется структурой графа и не меняется в силу постоянства топологии. Суммируя все времена получаем итоговую оценку на время переходных процессов для образования заданной формации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. Издание второе, переработанное и дополненное. - М.: Наука, 1969. - 408 с.

2. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. - 224 с.

3. *Poznyak A.S., et al.* Analysis of finite-time convergence by the method of Lyapunov functions in systems with second-order sliding modes. // J Appl. Math. Mech., vol. 75, issue 3, 2011. P. 289–303.

4. *Chen G., Lewis F. L.*,Distributed Adaptive Tracking Control for Synchronization of Unknown Networked Lagrangian Systems. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (TSMC) V.41, No. 3, 2011. pp. 805-816.

5. *Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А.* Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: Физматлит, 2006. — 328 с.