© 2012 г. Д.Н.ФЕДЯНИН
(Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

О ПРОБЛЕМЕ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТОВ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В докладе формализована проблема согласования интересов руководителей вычислительных центров. Построена теоретико-игровая модель, в рамках которой для случая двух центров вычислены точки равновесия по Нэшу, то есть такие действия руководителей, при которых никому из них не выгодно будет менять свое решение.

ON A PROBLEM ARISING IN IMPLEMENTATION OF DISTRIBUTED COMPUTING PROJECTS / D.F. Fedyanin (V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Profsoyuznaya 65, Moscow 117342, Russia, E-mail: dfedyanin@inbox.ru). The report formalizes a problem of harmonization of interests of Data Centers managers. For this sake Game-Theoretical Model had been constructed and Nash equilibrium points were found.

1. Введение

В современном мире по мере роста количества вычислительных центров сама по себе сложная проблема оптимизации разделения задачи на подзадачи и определения порядка их выполнения может быть осложнена необходимостью использования нескольких вычислительных центров, находящихся в рыночных условиях [1]. Такие центры могут иметь свои собственные интересы, которые будут определять их приоритеты при заключении контрактов, собственное программное обеспечение, а также уникальный график загрузки вычислительных мощностей. Все это приводит к тому, что проект сложно, а иногда даже невозможно реализовать в приемлемые сроки [2,3,4].

В данном докладе рассматривается теоретико-игровая формализация данной ситуации. Для случая двух вычислительных центров определены все возможные варианты количества равновесий игры.

2. Описание проблемы в виде теоретико-игровой модели

Рассмотрим ситуацию, когда вычислительная задача должна будет разбита на подзадачи, каждая из которых была отправлена для расчета в один из n вычислительных центров, имеющих мощность B_i, $i \in N=\{1,\ldots,n\}$. Пусть каждым центром может быть выделено для выполнения некоторой задачи доля вычислительного ресурса x_i. Таким образом, действиями игроков – вычислительных центров – являются числа из отрезка $[0;1]$.

Полезность проекта для i-го вычислительного центра будем задавать выражением

$$f_i = B_i x_i (\sum_j B_j x_j - Z) - \frac{r_i B_i^2 x_i^2}{2},$$

где $B_i x_i$ – его собственный вклад в проект, $B_1 x_1 + \ldots + B_n x_n$ общий вклад в проект, $Z>0$ – суммарная вычислительная мощность, необходимая для выполнения проекта, r_i – коэффициент затрат на выделение мощности.

Выписанная полезность состоит из двух компонент: первая компонента – прибыль каждого участника от реализации проекта, смысл второй компоненты – индивидуальные расходы на производство ресурсов.

Будем также считать, что существует риск, что любой из вычислительных центров не выполнит свою часть задачи в заявленное время. При этом *i*-ый центр имеет собственное представление о рисках, связанных с *j*-ым центром, которое будет выражаться его субъективной оценкой вероятности отсутствия задержки $p_{ij.}$ Рассмотрим случай, когда $r_i > 2; i = \overline{1,2}$, то есть рост расходов участников с ростом их действий существенен. Кроме того, мы будем считать, что $p_{ii} = 1; i = \overline{1,2}$

Математическое ожидание полезности, таким образом, будет следующим:

$$F_i = Mf_i = B_i x_i (\sum_j B_j p_{ij} x_j - Z) - \frac{r_i B_i^2 x_i^2}{2} = B_i \left(x_i (\sum_j B_j p_{ij} x_j - Z) - \frac{r_i B_i x_i^2}{2} \right).$$

Будем также считать, что существует риск, что любой из вычислительных центров не выполнит свою часть задачи в заявленное время. При этом *i*-ый центр имеет собственное представление о рисках, связанных с *j*-ым центром.

Функция наилучшего ответа i-го игрока на действия остальных имеет следующий вид:

$$g_i(x_{-i}) = \begin{cases} 1, если \dfrac{1}{B_i(r_i-2)}\left(\sum\limits_{j \neq i} B_j p_{ij} x_j - Z\right) > 1 \\ \dfrac{1}{B_i(r_i-2)}\left(\sum\limits_{j \neq i} B_j p_{ij} x_j - Z\right), если \quad \dfrac{1}{B_i(r_i-2)}\left(\sum\limits_{j \neq i} B_j p_{ij} x_j - Z\right) \in [0;1]. \\ 0, \dfrac{1}{B_i(r_i-2)}\left(\sum\limits_{j \neq i} B_j p_{ij} x_j - Z\right) < 0 \end{cases}$$

Оказывается, что справедлив следующий факт: в игре всегда существует равновесие в точке (0;0;…;0). Содержательно это означает, что никому из участников невыгодно выполнять задачу в одиночку.

3. Случай двух игроков

Рассмотрим более подробно случай двух игроков. Для него система соотношений для определения равновесия Нэша выглядит следующим образом:

(1)
$$\begin{cases} x_i = g_i(x_{-i}), \\ Z, B_i \geq 0; r_i > 2_i; p_{ij} \in [0;1]; i = \overline{1,2}. \end{cases}$$

На рисунке 1 показаны ситуации, в которых может достигаться одно, два или три равновесия по Нэшу в игре двух игроков. На рисунках по осям отложены действия игроков, а построенные кусочно-линейные кривые являются графиками функций наилучших ответов

$$g_1(x_2) = \arg\max_{\hat{x}_1} f_1(\hat{x}_1, x_2); \tag{2}$$

$$g_2(x_1) = \arg\max_{\hat{x}_2} f_2(x_1, \hat{x}_2).$$

Точки их пересечения соответствуют равновесиям Нэша.

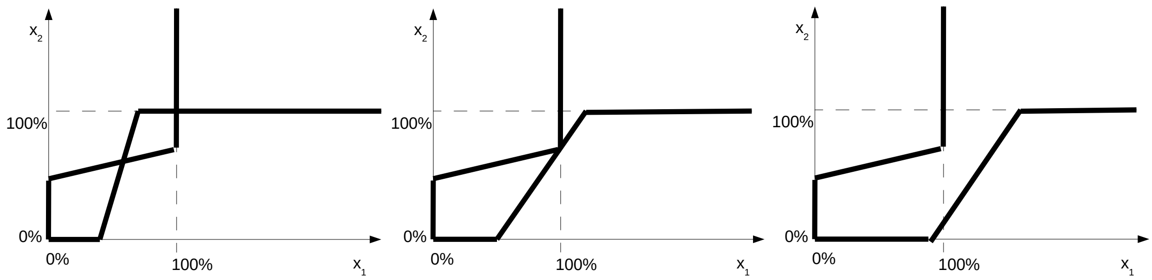

Рис. 1. Равновесия Нэша при различных соотношениях параметров игры.

Утверждение 1. В точке (1;1) существует равновесие Нэша, только если выполняется условие $Z \le B_2 p_{12} - B_1(r_1 - 2); Z \le B_1 p_{21} - B_2(r_2 - 2)$.

Доказательство. Действительно, выпишем функции наилучшего ответа в точке (1;1), тогда условие на равновесие запишется в виде

$$\frac{1}{B_1(r_1-2)}\left(B_2 p_{12} - Z\right) \ge 1; \; \frac{1}{B_2(r_2-2)}\left(B_1 p_{21} - Z\right) \ge 1,$$

что тождественно доказываемому условию, так как знаменатели в этих выражениях всегда положительны.

4. Выводы

В докладе была построена теоретико-игровая модель ситуации, в которой вычислительные центры принимают решение о выделении мощности для реализации общего проекта. Для случая двух вычислительных центров были выписаны условия существования точек равновесия Нэша. Очевидным продолжением исследований является рассмотрение верификации построенной модели рынка вычислительных центров на реальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chavez, A. Moukas, and P. Maes.* Challenger: a multi-agent system for distributed resource allocation. // In Proceedings of Autonomous Agents' 97. ACM, 1997. P. 323-331.

2. *Губко М.В., Новиков Д.А.* Теория игр в управлении организационными системами. 2-е изд., перераб. и доп. / М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2005. 138 с.
3. *Мазалов В. В.* Математическая теория игр и приложения / Изд-во Лань, 2010, 446 с.
4. *Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В.* Теория игр. СПб: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.
5. *Федянин Д.Н., Чхартишвили А.Г.* Об одной модели информационного управления в социальных сетях // Управление большими системами. Выпуск 31. М.: ИПУ РАН, 2010. С. 265-275
6. *Chkhartishvili1 A.G., Fedyanin D.N.* On Models of Information Management in Social Networks.// Collected abstracts of papers presented on the Fifth International Conference Game Theory and Management / Editors Leon A. Petrosyan and Nikolay A. Zenkevich. SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2011. P 57-61