

© 2012 г. В.А. МЕЛЕНТЬЕВ, канд. техн. наук
(Институт физики полупроводников
им. А.В. Ржанова СО РАН, Новосибирск)

МЕТРИКА, ЦИКЛОМАТИКА И СИНТЕЗ ТОПОЛОГИИ СИСТЕМ И СЕТЕЙ СВЯЗИ

Показано, что проекция графа определяет множества маршрутов между вершинами ее уровней, метрические характеристики этих маршрутов; кратность вершины в проекции определяет число соответствующих простых цепей, а сочетания кратных цепей дают описания циклов. Даны асимптотические оценки емкостной сложности проективного описания графа. Проекция графа дополнена понятиями оригинальной и реплицированной вершин. Показано, что реплицированные вершины полной проекции графа определяют множество хорд и фундаментальную систему циклов соответствующего каркаса. Получены формулы, перечисляющие реплики в проекции s -регулярного графа с единственным определяющим обхват циклом. Даны условия компактности, связывающие порядок такого графа с ограничениями на его обхват. Приведены примеры генерации графов с циклами заданной минимальной длины.

THE METRIC, CYCLOMATIC AND SYNTHESIS OF TOPOLOGY OF SYSTEMS AND NETWORKS / V.A. Melent'ev (A.V. Rzhhanov Institute of Semiconductor Physics SB RAS, pr. Lavrentieva 13, Novosibirsk, Russia, 630090, E-mail: melva@isp.nsc.ru). It is shown, that the projection of the graph defines sets of sequences between the vertices of its levels and defines metric specs of these sequences; multiplicity of vertex in a projection defines number of corresponding simple chains, and combinations of multiple chains give descriptions of circuits. Asymptotic estimations of the space complexity of projective description of the graph are given. The projection of the graph is added by concepts of original and replicated vertices. It is shown that replicated vertices of the complete projection of the graph define a set of chords and fundamental set of circuits of the corresponding spanning tree. The formulas listing replicas in a projection of the regular graph with the unique circuit defining a girth are received. The compactness conditions connecting the order of such graph with restriction on its girth are given. Examples of generating of graphs with circuits of the specified minimal length are resulted.

1. Введение

Исследования системных и сетевых топологий основаны, как правило, на графовом их представлении, когда между множествами модулей системы и вершин графа, а также между множествами линий связи и ребер графа установлены биективные соответствия. Множество исследуемых/оптимизируемых топологических свойств системы также име-

ет биективный образ в описании графа и в множестве его характеристик, что позволяет проводить сопоставительный анализ, используя характеристики описаний соответствующих графов. При этом оптимизируемыми показателями качества топологии больших систем традиционно являются связанные с порядком и степенью графа метрические и цикломатические характеристики. Например, в работе [1] исследуются условия существования s -регулярных графов минимального порядка с равным двойному диаметру обхватом. В работе [2] определяющими структурными признаками оптимальных структур с минимизированными транзитными задержками названы минимальный диаметр и максимальный обхват. В работах [3], [4] в качестве оптимальных исследуются графы с максимально возможными при заданных значениях степени и порядка обхватами. Заметим, что оптимальность исследуемых в упомянутых выше работах графов контекстуально связана с рассмотренным в работах [5], [6] свойством эквицентральности.

Однако вследствие комбинаторной природы задач анализа, синтеза и реконфигурации топологии вычислительных систем (ВС) и сетей связи их решение традиционно основано на переборных, эвристических или стохастических подходах. При этом нелинейный рост числа состояний в больших системах обостряет проблему достижения приемлемого компромисса между качественностью процессов управления и их актуальностью, приводит к появлению нештатных ситуаций и к неустойчивой динамике функционирования систем. Основной недостаток традиционно используемых матрично-списковых описаний графов систем заключается в низкоуровневости задаваемых этими описаниями бинарных отношений между вершинами, тогда как используемые для оценки качества структур маршруты и циклы по определению представляют собой многоместные отношения на множестве вершин графа. В работах [7] – [9] предложено описание графа проекциями, в явном виде содержащими в себе основные его метрические и цикломатические характеристики.

Проективное описание графов послужило основой предложенного в [10] аналитического подхода к синтезу графов с требуемыми значениями порядка, диаметра и обхвата. Суть подхода состоит в том, что задача синтеза регулярной структуры ВС с заданными значениями порядка, степени и диаметра ее графа сведена к абстрагированному от геометрического представления построению и решению системы соответствующих заданию проекций. Такая постановка аналогична построению и решению системы уравнений с многими неизвестными, роль которой играет система проекций (СП) генерируемого графа, а искомыми являются отношения смежности, не противоречащие требуемым значениям метрических и цикломатических характеристик. Выявление данной работой условий совместного достижения заданных параметров позволит ограничить область потенциально возможных отношений смежности и соответственно упростить решение системы проекций.

В работе проведено исследование совместности метрических и цикломатических характеристик связанных неориентированных простых (без кратных ребер и петель) графов с равновзвешенными ребрами. Получены аналитические выражения, связывающие длину минимального цикла с диаметром графа заданного порядка. Условия компактности s -регулярных простых графов, полученные автором в [11], конкретизированы ограничениями на обхваты. Даны примеры предваряющего генерацию анализа и полученных на основе такого анализа графов.

2. Основные положения

Эксцентриситет вершины – для данной вершины $u \in V$ графа $G(V, E)$ величина $e(u) = \max_{v \in V} \delta(u, v)$, где $\delta(u, v)$ – расстояние между вершинами u и v .

Расстояние между вершинами - длина кратчайшей простой цепи между ними.

Диаметр – наибольшее расстояние между вершинами связного графа:
 $d(G) = \max_{u \in V} e(u)$.

Фундаментальный цикл — относительно данного каркаса T в графе G цикл, однозначно определяемый добавлением к каркасу одной хорды $e \in E(G) \setminus E(T)$.

Фундаментальная система циклов — относительно данного каркаса T множество циклов, определяемых добавлением к каркасу ровно одной хорды каркаса T .

Суграф — часть графа, имеющая то же множество вершин, что и сам граф.

Каркас — для данного неориентированного графа суграф в виде дерева.

Хорда — ребро графа, не принадлежащее выделенному каркасу.

Цикломатическое число графа — для неориентированного графа $G(V, E)$ число $\lambda(G) = |E| - |V| + l$, равное мощности множества фундаментальных циклов (числу хорд) относительно каркаса T графа G . Здесь l — число компонент связности.

Более подробно остановимся на понятии проекции графа и технологии ее построения.

2.1. Проективное описание графа

Проекция $P_i(v_0)$ неориентированного простого графа $G(V, E)$ представляет собой i -уровневую конструкцию, нулевой уровень которой состоит из ракурсной вершины $v_0 \in V$; порожденное ею подмножество $V(1) \subset V$ содержит $s(v_0)$ вершин окружения $N(v_0)$ и является 1-м уровнем проекции, i -й же ее уровень ($i \geq 1$) объединяет подмножества вершин, порожденных вершинами $V(i-1)$ предшествующего $(i-1)$ -го уровня и являющихся окружениями этих вершин без их предшествующих. Таким образом, последовательность непосредственного предшествования вершине $v_j \in V$, принадлежащей j -му уровню проекции $P_i(v_0)$, вершины v_{j-1} $(j-1)$ -го уровня и далее вплоть до ракурсной вершины v_0 нулевого уровня представляет собой маршрут $W(v_j, v_0)$; соответственно, обратная последовательность — маршрут $W(v_0, v_j)$.

В общем случае вершина $u \neq v_0$ из V в i -уровневой проекции может повторяться, т. е. быть m -кратной. Кратность $m(u)$ вершины u в проекции $P_i(v_0)$ и число описываемых ею простых цепей из ракурсной вершины v_0 в вершину u равнозначны. Чтобы различать местоположение экземпляров m -кратных вершин, проиндексируем последние в соответствии с порядком их размещения на уровнях рассматриваемой проекции: "снизу вверх" (при возрастании номеров уровней) и "слева направо" (для одного и того же уровня). Нулевое значение присвоим индексу экземпляра вершины u , расположенного первым слева на низшем уровне. Индексам остальных экземпляров u_k , $1 \leq k \leq m(u) - 1$ присвоим значения в соответствии с оговоренным выше порядком размещения: $u_k \in (u_1, \dots, u_{m-1})$. Аналогично упорядочим и проиндексируем номера уровней $j_k \in (j_0, j_2, \dots, j_{m-1})$, на которых расположены экземпляры вершины u : оригинальной вершине u_0 соответствует уровень $j_0 = \min(j_0, j_1, \dots, j_{m-1})$, вершина u_{m-1} расположена на последнем (j_{m-1}) -м уровне, $j_{m-1} = \max(j_0, j_1, \dots, j_{m-1})$. Заметим, что числовые значения как отдельных, так и всех элементов упорядоченного множества $(j_0, j_1, \dots, j_{m-1})$ могут различаться или совпадать. Номер уровня j_0 , на котором расположена вершина u_0 , имеет минимальное значение и равен длине кратчайшего маршрута $W(v_0, u_0)$ в множестве $\{W(v_0, u)\}$ маршрутов из v_0 в u . Экземпляр u_0 вершины u , расположенный первым слева на низшем уровне проекции, назовем оригинальным. Остальные из оставшихся $(m-1)$ ее экземпляров будем называть *реплицированными*, или просто *репликами* (*replica*).

Проекция графа с кратными вершинами несет в себе информацию о циклах, получаемых объединением простых цепей, соединяющих ракурсную и кратную вершины: $W(v_0, u_x) \cup W(u_y, v_0)$, $x \neq y$, $x, y \in \{1, \dots, m-1\}$. К примеру, при $m(u) = 3$, $u \in V$ проекция содержит в себе информацию о циклах $K_1(v_0, v_0) = W(v_0, u_0) \cup W(u_1, v_0)$, $K_2(v_0, v_0) = W(v_0, u_0) \cup W(u_2, v_0)$ и $K_3(v_0, v_0) = W(v_0, u_1) \cup W(u_2, v_0)$. Число циклов, содержащих m -кратную вершину, определяется сочетанием из m элементов по два — $C_m^2 = m!/2(m-2)!$.

Проекция $P_i(v_0)$ графа $G(V, E)$ является полной, если ею определены все вершины и все ребра (отношения смежности вершин) этого графа. При этом уровень i , впервые доопределяющий до V множество $V_i = \bigcup_{i=0} V(i)$ вершин всех нижерасположенных уровней проекции, соответствует эксцентриситету $e(v_0)$ ракурсной вершины [9]:

$$i = e(v_0) \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1} V(i-1) \subset V, \bigcup_{i=0} V(i) = V_i = V \right).$$

Равенство номера последнего в проекции уровня эксцентриситету ракурсной вершины является условием вершинной полноты этой проекции. Это означает, что в проекции $P_{i > e(v_0)}(v_0)$ уровни, превышающие значение эксцентриситета ракурсной вершины, не могут содержать в себе никаких иных, отличных от содержащихся в $P_{i = e(v_0)}(v_0)$, вершин. Другими словами, превышающие значение эксцентриситета ракурсной вершины уровни $i > e(v_0)$ проекции $P_i(v_0)$ не имеют оригинальных вершин и содержат в себе только реплицированные вершины.

Условие вершинной полноты не является достаточным для определения ею всех отношений смежности в описываемом графе, — минимальное для полноты проекции число уровней определяется выражением:

$$(1) \quad i_{\min}(v_0) = \begin{cases} e(v_0), & A(u, v) = 0 \\ e(v_0) + 1, & A(u, v) = 1. \end{cases}$$

Предикат $A(u, v)$ является истинным, если в множестве $V(i)$ вершин уровня $i = e(v_0)$, найдется хотя бы 2 смежные вершины $u, v \in V(i)$, $\partial(u, v) = 1$, равноотстоящие от ракурсной вершины v_0 на величину ее эксцентриситета:

$$\exists u, v \in V(i = e(v_0)) (\partial(v_0, u) = \partial(v_0, v) = e(v_0), \partial(u, v) = 1 \Rightarrow A(u, v) = 1).$$

Заметим, что определение «равноотстоящих» от v_0 вершин означает, что пути $W(v_0, u)$ и $W(v_0, v)$ из v_0 в вершины u и v являются кратчайшими и, следовательно, они не могут быть кратными ни одной из вершин нижележащих уровней рассматриваемой проекции.

Так как кратность $m(v)$ вершины v равна числу описываемых проекцией простых цепей из ракурсной вершины v_0 в вершину v , то длина $l(v)$ каждого образующегося из них цикла равна сумме номеров $i, j \leq k$ уровней, на которых расположена вершина v : $l(v) = i + j$, если образующие цикл пути не имеют пересечений кроме как в начальной и конечной вершинах. Если же такое пересечение существует на x -м уровне ($0 < x < k$), то $l(v) = i + j - 2x$. Это соответствует доказанному в [9] утверждению, констатирующему, что обхват $g(G)$ графа $G(V, E)$, заданного проекцией $P(v_0)$, не превышает минимальной из сумм номеров ее уровней, содержащих одноименную вершину.

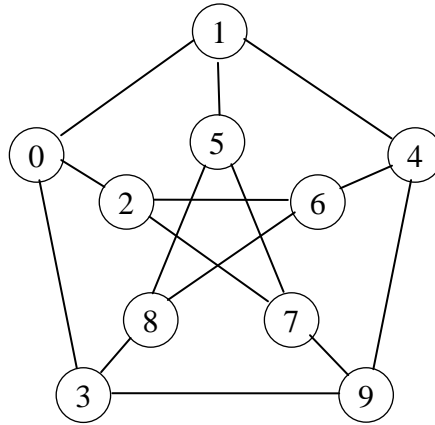


Рис. 1 Граф Петерсена

Продemonстрируем вышесказанное примером проекций изображенного на рис. 1 графа Петерсена. Далее реплики вершин в проекциях выделены жирным курсивом.

$$P_2(0) = 0^{\{\mathbf{1}^{[4,5]}, \mathbf{2}^{[6,7]}, \mathbf{3}^{[8,9]}\}}$$

Из рисунка видно, что вершине 4 смежны вершины 6 и 9 второго уровня, но ребра (4,6) и (4,9) проекцией $P_2(0)$ графа не определены. Также не определены и ребра (5,7), (5,8) и (6,8), (7,9), потому проекция будет полной, если в ней не менее 3-х уровней:

$$P_3(0) = 0^{\{\mathbf{1}^{[4\{6,9\}, 5\{7,8\}]}, \mathbf{2}^{[6\{4,8\}, 7\{5,9\}]}, \mathbf{3}^{[8\{5,6\}, 9\{4,7\}]}\}}$$

Заметим, что все вершины 3-го уровня проекции $P_3(0)$ являются реплицированными; кратность, к примеру, вершины 4 — $m(4) = 3$, что соответствует трем описываемым этой проекцией путям из ракурсной вершины $v_0 = 0$ в вершину $v = 4$:

$$W_1(0,4) = (0,1,4), \quad W_2(0,4) = (0,2,6,4), \quad W_3(0,4) = (0,3,9,4).$$

При этом путь $W_1(0,4)$ является кратчайшим, так как вершина 4 впервые появляется на 2-м уровне проекции, длина его равна двум. Маршруты $W_2(0,4)$ и $W_3(0,4)$ обладают длиной, равной трем, так как реплики вершины 4 расположены на 3-м уровне $P_3(0)$. Все маршруты здесь являются независимыми: множества вершин, составляющие их, не пересекаются нигде, кроме как в начальной и конечной вершинах.

2.2. Минимизация проективного описания

Утверждение: Вершины, порождаемые в проекции графа репликами, также являются реплицированными.

Доказательство. Пусть вершина $u \in V$ m -кратно входит в состав k -урвневой проекции $P_k(v_0)$ графа $G(V,E)$ и $m(u) > 1$. Пусть при этом вершине u_i , расположенной на уровне j_i , $1 \leq i \leq m - 1$ непосредственно предшествует вершина $x_i \in N(u)$, т.е. вершина x_i ($j_i - 1$)-го уровня порождает на вышестоящем j_i -м уровне проекции $P_k(v_0)$ смежную ей вершину $u_i \in N(x_i)$. Согласно данному в 2.1. определению вершины-оригинала номер уровня j_0 , на котором расположена вершина u_0 , имеет минимальное числовое значение и равен длине маршрута $W(v_0, u_0)$ из v_0 в u_0 , кратчайшего в множестве $W(v_0, u) = \{W(v_0, u_i)\}$.

Очевидно, что из того же определения доказываемое утверждение будет истинным, если $\forall i \in \{1, \dots, m-1\} (M(u_i) \subset M(u_0) \cup \{x_0\})$. В соответствии с описанной в предыдущем разделе методикой построения проекции графа порожденное вершиной u_0 подмножество $M(u_0)$ вершин — $M(u_0) = N(u) \setminus W(v_0, u_0)$.

Допустим, что маршрут $W(v_0, u_0)$ из ракурсной v_0 в оригинальную вершину u_0 и окружение $N(u)$ вершины u пересекаются более чем в одной вершине x_0 : $W(v_0, u_0) \cap N(u) = \{x_0, y_0\}$. Очевидно, что тогда вершине x_0 в маршруте $W(v_0, u_0)$ должна предшествовать (не обязательно непосредственно) вершина y_0 — $W(v_0, u_0) = (v_0, \dots, y_0, \dots, x_0, u_0)$. Но так как $y_0 \in N(u)$, то в рассматриваемом случае вершина u (обозначим ее u_0^*) появится на уровне j_0^* , меньшем j_0 , и маршрут $W^*(v_0, u_0^*) = (v_0, \dots, y_0, u_0^*)$ будет более коротким, чем $W(v_0, u_0) = (v_0, \dots, y_0, \dots, x_0, u_0)$. Это противоречит принятой нами исходной посылке о том, что маршрут $W(v_0, u_0)$ является кратчайшим и что оригинальной вершине u_0 непосредственно предшествует вершина x_0 , входящая в состав $(j_0 - 1)$ -го уровня проекции. Таким образом, допущение о возможности наличия в кратчайшем маршруте более чем одной вершины из окружения оригинальной вершины u_0 , является неправомерным. Тогда $W(v_0, u_0) \cap N(u) = \{x_0\}$ и $M(u_0) = N(u) \setminus \{x_0\}$. Отсюда — множество, включающее в себя непосредственно предшествующую оригинальной u_0 вершину x_0 , находящуюся на уровне $(j_0 - 1)$, и порожденное на $(j_0 + 1)$ уровне вершиной u_0 подмножество $M(u_0)$, эквивалентно окружению $N(u)$: $\{x_0\} \cup M(u_0) = N(u)$. Таким образом, все вершины окружения $N(u)$ входят в состав $(j_0 + 1)$ уровней проекции $P_k(v_0)$, причем $(j_0 + 1) \leq k$. Любое же из подмножеств $M(u_i)$, порожденных репликами u_i , $1 < i \leq m$ на уровне $(j_i + 1)$, не меньшем $(j_1 + 1)$, является лишь подмножеством вершин, уже включенных в состав $(j_0 + 1)$ -го уровня проекции, $M(u_i) \subset N(u)$. Следовательно, среди вершин, порожденных реплицированными вершинами, не может быть оригинальных, что соответствует Утверждению.

Из доказанного утверждения понятно, что проекция $P_k(v_0)$ графа $G(V, E)$ является полной, если все оригинальные вершины расположены ниже k -го уровня. Если же хотя бы одна вершина u из V расположена на k -м уровне, то проекция будет полной только при условии, что ее оригинал u_0 и реплики u_i ($1 < i \leq m - 1$) порождены разными вершинами $(k - 1)$ -го уровня и число этих вершин не меньше степени $s(u)$ вершины u .

Это утверждение позволяет: 1) сократить информационный объем проективных описаний, 2) упростить построение проекции графа и 3) понизить трудоемкость решения задач генерации графов [11] или актуализации их описаний [12].

Сокращение информационного объема проективного описания графа заключается в том, что развертывание проекции на вышестоящие в отношении реплицированных вершин уровни может быть прекращено. Определение порождаемых подмножеств при построении проекции осуществляется лишь для оригинальных вершин и сводится к процедуре исключения из окружения $N(u)$ оригинальной вершины u_0 только ее непосредственной предшественницы x_0 : $\forall u \in V (M(u_0) = N(u) \setminus W(v_0, u_0) = N(u) \setminus \{x_0\})$. Отмеченное третьим преимущество проистекает из первых двух и состоит в том, что при генерации графа или актуализации его описания изменениям подвергаются лишь порождаемые оригинальными вершинами подмножества.

Заметим, что в отличие от полной проекции $P_k(v_0)$, в явном виде включающей в себя все (с длиной, не большей k) маршруты из v_0 , в минимизированной проекции некоторые из этих маршрутов могут быть скрыты. Однако для выявления таковых минимизированная проекция может быть развернута, так как содержит достаточную для этого информацию.

Продemonстрируем вышесказанное на примере проекций изображенного на рис. 2 регулярного степени $s = 3$ и порядка $n = 8$ графа, взяв в качестве ракурсных вершины 0 и 7. Здесь не следует обращать внимание на сплошную/штриховую прорисовку ребер, которая будет использована в следующем подразделе.

Первые уровни проекций включают окружения соответствующих ракурсных вершин:

$$P_1(0) = 0^{1,2,3},$$

$$P_1(7) = 7^{2,3,5}.$$

Первый уровень не содержит реплик, проекции не являются вершинно-полными и долж-

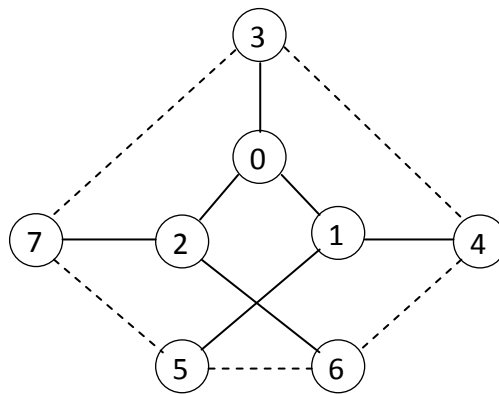


Рис. 2

ны быть надстроены 2-м уровнем:

$$P_2(0) = 0^{\{1^{4,5}, 2^{6,7}, 3^{4,7}\}},$$

$$P_2(7) = 7^{\{2^{0,6}, 3^{0,4}, 5^{1,6}\}}.$$

Полученные 2-уровневые проекции являются вершинно-полными и содержат кратные вершины: $m(4) = m(7) = 2$ в проекции $P_2(0)$ и $m(0) = m(6) = 2$ — в $P_2(7)$. Кратность этих вершин меньше степени графа, и для достижения полноты дополним проекции 3-м уровнем, однако, реплицированные вершины 2-го уровня на 3-й уровень не разворачиваем:

$$P_3(0) = 0^{\{1^{4\{3,6\}}, 5^{6,7}\}, 2^{\{6^{4,5}, 7^{3,5}\}}, 3^{\{4,7\}}\}},$$

$$P_3(7) = 7^{\{2^{\{0^{1,3}\}}, 6^{4,5}\}, 3^{\{0,4\}}, 5^{\{1,6\}}\}}.$$

Третьи уровни уже не содержат оригинальных вершин, все их вершины — реплики, поэтому полученные проекции становятся полными и на этом их построение завершим. Сравнив полученные минимизированные проекции с неминимизированными легко убедиться в перечисленных выше преимуществах первых. Несложно увидеть также, что емкостная сложность минимизированного описания снижается от $O(n^2)$ при описании графа матрицей смежности или от $O(s^{d+1})$ в развернутой полной проекции графа, до $O(ns)$.

3. Проекция графа и циклы

3.1. Фундаментальные циклы в проективном описании графа

Пусть $G(V,E)$ — неориентированный простой граф, $P_i(v_0)$ — обладающая полнотой i -уровневая проекция графа. Ракурсная вершина этой проекции $v_0 \in V$ обладает эксцентриситетом $e(v_0)$, и число i уровней в проекции определяется выражением (1). Таким образом, проекция $P_i(v_0)$ содержит не только оригинальные вершины, но и их реплики. Удалив эти реплики из проекции, получим вершинно-полную, включающую в себя множество V оригинальных вершин, проекцию каркаса $T(V,E')$ графа $G(V,E)$ с корнем в вершине v_0 , — обозначим эту проекцию $T(v_0)$. Вернув в $T(v_0)$ любую из изъятых реплик, получим цикл, в котором эта реплика совместно с порождающей ее вершиной определяет хорду, т. е. цикл является фундаментальным для каркаса $T(v_0)$ по определению. Покажем это для изображенного на рис. 2 графа, — здесь обозначенные штриховыми линиями ребра соответствуют изъятым из проекции $P_3(0)$ репликам оригинальных вершин.

$$P_3(0) = 0^{\{1^{\{4\{3,6\},5\{6,7\}\},2^{\{6\{4,5\},7\{3,5\}\},3^{\{4\{1,6\},7\{2,5\}\}\}},$$

$$T_2(0) = 0^{\{1^{\{4,5\},2^{\{6,7\},3\}},$$

Так как кратность m некоторых вершин в проекции $P_3(0)$ больше двух (например, $m(3) = m(4) = m(7) = 3$, $m(5) = m(6) = 4$), то число удаленных реплик превышает и число хорд, и цикломатический ранг данного графа $\lambda(G) = |E| - |V| + 1 = 5$.

Нетрудно убедиться в том, что при удалении реплик из минимизированной проекции получим ту же самую проекцию каркаса с теми же висячими вершинами. Заметим, что в рассматриваемом случае число висячих в проекции $T_2(0)$ оригинальных вершин равно цикломатическому рангу графа, — это вершины 4,5,6,7 и 3. Однако такое равенство числа висячих в проекции каркаса вершин цикломатическому рангу графа G не является правилом. Несложно увидеть, что $\lambda(G) = |E| - |E'|$, т. е. для того, чтобы выявить множество хорд, определяющих фундаментальную систему циклов в графе, достаточно перечислить удаляемые из минимизированной проекции ребра, инцидентные репликам данной проекции и предшествующим им оригинальным вершинам. В данном случае это будут ребра (4,3), (4,6), (5,6), (5,7), (6,4), (6,5), (7,3), (7,5), (3,4), (3,7). В неориентированном графе порядок следования вершин в описании ребра не играет роли, т. е. (4,3) \equiv (3,4), (4,6) \equiv (6,4), (5,6) \equiv (6,5), (5,7) \equiv (7,5) и (7,3) \equiv (3,7), поэтому все хорды данного графа будут представлены множеством $\{(4,3), (4,6), (5,6), (5,7), (7,3)\}$.

3.2. Перечисление реплик в проекции графа

Введем следующие обозначения:

- $n \equiv n(G)$ — порядок графа $G(V,E)$; $n(i)$ — число оригинальных вершин i -го уровня, а $n_i = \sum_{i=0} n(i)$ — число оригинальных вершин на i уровнях проекции $P_i(v_0)$;
- $r(i)$ и $r_i = \sum_{i=2} r(i)$ — число реплик, соответственно, i -го и на i уровнях проекции;
- $N(i) = n(i) + r(i)$ — общее число элементов i -го уровня в проекции графа; $N_i = \sum_{i=0} N(i) = n_i + r_i$ — число элементов в i -уровневой проекции $P_i(v_0)$ графа.

Нулевой уровень проекции $P_i(v_0)$ простого графа $G(V,E)$ состоит из ракурсной вершины $v_0 \in V$, а 1-й уровень содержит $s(v_0)$ вершин ее окружения $N(v_0)$, т. е. все верши-

ны этих уровней являются оригинальными. Уровни выше 1-го могут включать в себя и оригинальные вершины, и реплики. При этом число n_i оригинальных вершин равно порядку n графа только в проекции с числом уровней, равным эксцентриситету $e(v_0)$, а вышерасположенные уровни содержат только реплицированные вершины:

$$\begin{aligned} (i < 2) &\Rightarrow (r(i) = r_i = 0, n(i) = N(i), n_i = N_i), \\ (2 \leq i < e(v_0)) &\Rightarrow (r(i) \geq 0, r_i \geq r(i), n(i) \leq N(i), n_i < n(G) \leq N_i), \\ (i = e(v_0)) &\Rightarrow (r(i) \geq 0, r_i \geq r(i), n(i) \leq N(i), n_i = n(G) \leq N_i), \\ (i > e(v_0)) &\Rightarrow (n(i) = 0, n_i = n(G), r(i) = N(i)) \end{aligned}$$

В проекции s -регулярного простого графа число элементов $N(i)$ i -го уровня — геометрическая прогрессия $N(i) = s(s-1)^{i-1}$. Определив число N_i элементов в i -уровневой проекции $P_i(v_0)$ увеличенной на единицу суммой членов прогрессии, 1-й член которой равен степени s , а знаменатель — $(s-1)$, получим известную из [1]-[4] формулу:

$$(2) \quad N_i = \begin{cases} \frac{s(s-1)^i - 2}{s-2}, & \text{при } s > 2 \\ 1 + i \cdot s, & \text{при } 2s = \end{cases}$$

В s -регулярном порядка $n = |V|$ простом графе $G(V, E)$ выделим k -цикл $K = W(v_0, v_0)$, длина k которого минимальна и, следовательно, равна обхвату графа $g(G)$. Из вершины $v_0 \in K$ построим проекцию $P_i(v_0)$. В соответствии с принятым условием минимальности цикла K все принадлежащие ему вершины расположены на минимальном от v_0 расстоянии, иначе существовал бы цикл с меньшей k длиной. Цикл K определен проекцией, если кратность $m(u)$ хотя бы одной его вершины $u \in K$ превышает единичную: $m(u) > 1$. При этом цикл $K = W_1(v_0, v_0) = W(v_0, u_0) \cup W(u_1, v_0)$ определяется объединением простых цепей из ракурсной v_0 в оригинальную u_0 и из реплики u_1 в v_0 . Длина цикла равна сумме номеров уровней, один из которых (уровень j_0) включает в себя оригинал (u_0) вершины u , а на другом (уровень $j_1 \geq j_0$) находится первая реплика u_1 этой вершины.

Двухэлементные разбиения $\{(\lfloor k/2 \rfloor, \lceil k/2 \rceil), (\lfloor k/2 \rfloor - 1, \lceil k/2 \rceil + 1), \dots, (1, k-1)\}$ натурального числа k (длины цикла) определяют местонахождение кратных вершин в проекции $P_i(v_0)$: 1-й элемент разбиения соответствует уровню j_0 оригинального экземпляра u_0 вершины u , а 2-й элемент — уровню реплики u_1 этой вершины. Таким образом, оригинальные вершины k -цикла расположены на уровнях x ($0 < x \leq \lfloor k/2 \rfloor$), а их первые реплики — на уровнях $y = k - x$, $\lceil k/2 \rceil \leq y < k$. Уровень проекции, начиная с которого следует ожидать появления реплицированных вершин, определяется округлением вверх половины длины минимального цикла, и $r_i = 0$ при $i < \lceil k/2 \rceil$. Число таких разбиений — $k - \lceil k/2 \rceil = \lfloor k/2 \rfloor$.

Порядок графа тождественен числу оригинальных вершин в вершинно-полной проекции, этим свойством обладают проекции с числом уровней, равным эксцентриситету ракурсной вершины. Поэтому влияние длины k минимального цикла K в s -регулярном графе на порядок n последнего оценим максимумом числа оригинальных вершин в $e(v_0)$ -уровневой его проекции $P_e(v_0)$, где $e \equiv e(v_0)$ — эксцентриситет принадлежащей циклу K вершины. Проекция $P_i(v_0)$ графа с числом i его уровней, большим эксцентриситета $e(v_0)$ ракурсной вершины v_0 , исключим из рассмотрения, как не влияющие на изменение порядка графа, т. к. любой превышающий $e(v_0)$ уровень проекции не содержит

оригинальных вершин, и все вершины таких уровней являются реплицированными.

При четных значениях k справедливо $\lfloor k/2 \rfloor = \lceil k/2 \rceil = k/2$. Разбиение с равными элементами соответствует размещению оригинальной вершины u_0 и ее реплики u_1 на одном и том же уровне проекции с номером $i = k/2$. В этом случае $r(k/2) = r_{k/2} = 1$. На следующем $(k/2 + 1)$ -м уровне кроме вершин, с коэффициентом $(s - 1)$ порожденных репликой u_1 и являющихся реплицированными в соответствии с доказанным выше утверждением, появится реплика одной из 2-х расположенных на $(k/2 - 1)$ -м уровне и принадлежащих циклу оригинальных вершин, т. е. $r(k/2 + 1) = s$. На уровнях $k/2 < i \leq e(v_0)$ вплоть до уровня с номером, равным эксцентриситету $e(v_0)$ ракурсной вершины, число $r(i)$ реплик, вносимых данным циклом в состав i -го уровня проекции, определяется как элемент геометрической прогрессии $r(i) = s(s - 1)^{i - k/2 - 1}$. Тогда суммарное число реплицированных вершин на i уровнях проекции определится увеличенной на единицу (за счет $k/2$ -го уровня) суммой членов соответствующей геометрической проекции (мы не рассматриваем здесь s -регулярные графы с $s = 2$ — "кольца", в которых сумма членов геометрической прогрессии определяется как $2(i - k/2)$):

$$(3) \quad \begin{aligned} r_i &= 1 + \frac{s((s-1)^{i-k/2} - 1)}{s-2} = \frac{s \cdot (s-1)^{i-k/2} - 2}{s-2}, \\ n_i &= \frac{s(s-1)^i - 2}{s-2} - r_i = \frac{s \cdot (s-1)^{i-k/2} \cdot ((s-1)^{k/2} - 1)}{s-2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай с нечетной длиной минимального цикла в графе. Разбиения нечетного натурального числа k представим в виде множества $\{(\lfloor k/2 \rfloor, \lceil k/2 \rceil), (\lfloor k/2 \rfloor - 1, \lceil k/2 \rceil + 1), \dots, (1, k - 1)\}$, число таких разбиений (элементов множества) равно $\lfloor k/2 \rfloor$. Второй элемент первого множества разбиения, равный $\lceil k/2 \rceil$, дает номер уровня проекции, на котором впервые появляются реплики, это две реплики оригинальных вершин, отстоящих от ракурсной v_0 на расстоянии, равном $\lfloor k/2 \rfloor$: $r(\lceil k/2 \rceil) = 2$. Реплики последующих уровней $\lceil k/2 \rceil < i \leq e(v_0)$ порождены этими репликами, и число их геометрически прогрессирует со знаменателем $(s - 1)$. Итак, реплики на i -х уровнях проекции при $i < \lceil k/2 \rceil$ отсутствуют и $r(i) = 0$, при $\lceil k/2 \rceil \leq i \leq e(v_0)$ число реплик i -го уровня $r(i) = 2(s - 1)^{i - \lceil k/2 \rceil}$, а при $i > e(v_0)$ все вершины i -х уровней являются репликами и их число $r(i) = N(i) = s(s - 1)^{i-1}$. Общее число реплик r_i в проекции графа с нечетным k -циклом составит:

$$r_i = \sum_{i=\lceil k/2 \rceil}^{e(v_0)} r(i) = \frac{2((s-1)^{i-\lceil k/2 \rceil+1} - 1)}{s-2}.$$

Тогда для нечетных k -циклов при $s > 2$ получим:

$$(4) \quad r_i = \frac{2((s-1)^{i-\lceil k/2 \rceil+1} - 1)}{s-2}, \quad n_i = \frac{(s-1)^{i-\lfloor k/2 \rfloor} (s(s-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} - 2)}{s-2}.$$

Значения числа реплик и оригинальных вершин в проекции при наличии нескольких циклов не являются аддитивными, так как зависят от возможного их пересечения, поэтому, обобщив полученные выше выражения для оригинальных вершин и заменив в

них длину цикла k величиной обхвата g , а знак "=" на " \leq ", получим предельные для n о-
рядка графа с заданным обхватом значения.

3.3. Ограничения на обхваты в компактных графах

В [11] введено понятие $n(s)$ -компактного графа, как регулярного графа $G(V, E)$ по-
рядка n и степени s , обладающего минимальным при заданных значениях n и s диамет-
ром d . Представленное в общем виде условие компактности указывает на соответст-
вующие диаметру d и степени s графа G нижнюю и верхнюю границы его порядка:

$$N_{d-1} < n \leq N_d.$$

Здесь верхний предел порядка n определяется выражением (2), равен максимальному
числу элементов в вершинно-полной проекции графа и предполагает отсутствие в ней
реплик, что равносильно отсутствию циклов с меньшей, чем $2d + 1$ длиной. В компактном
 $n(s)$ -графе по определению исключено наличие вершин с эксцентриситетами, меньшими
диаметра, поэтому все вершины являются центральными: $\forall v \in V, (e(v) = d(G))$.

Допуская наличие в графе циклов, с меньшей, чем $2d + 1$, длиной и учитывая свя-
занное с этим появление реплик и уменьшение числа оригинальных вершин в вершин-
но-полной d -уровневой проекции при том, что число оригинальных вершин в ней равно
порядку графа, запишем:

$$N_{d-1} < n \leq N_d - r_d.$$

Из (3) для $n(s)$ -компактного графа с четным обхватом получим:

$$(5) \quad \frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{s \cdot (s-1)^{d-g/2} \cdot ((s-1)^{g/2} - 1)}{s-2}.$$

Из (4) для $n(s)$ -компактного графа с нечетным обхватом имеем:

$$(6) \quad \frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{(s-1)^{d-\lfloor g/2 \rfloor} (s(s-1)^{\lfloor g/2 \rfloor} - 2)}{s-2}.$$

Рассмотрим случаи, обуславливающие потенциальную возможность построения $n(s)$ -
компактного графа соотношениями между его диаметром d и обхватом g . Такой анализ
позволит изначально исключить из потенциальных подмножеств искомым вершин те, ко-
торые могли бы войти в состав циклов с недопустимой длиной, — это упростит систему
проекций генерируемого графа и процесс ее решения:

1) $g = 2d + 1$. Из (6) получим:

$$r_d = 0, \quad n_d = \frac{s(s-1)^d - 2}{s-2}.$$

Этот случай соответствует максимальному при данном соотношении d и g поряд-
ку $n(s)$ -компактного графа: сумма номеров уровней оригинальной вершины и ее

реплики не может быть меньшей обхвата, поэтому уровни $i \leq d$ не содержат реплик, и число оригинальных вершин в вершинно-полной d -уровневой проекции максимально. По этой же причине $(d + 1)$ -й уровень каждой проекции включает в себя только реплики вершин исключительно d -го уровня. Число реплик $N(d+1) = s(s - 1)^d$ превышает число $N(d) = s(s - 1)^{d-1}$ оригинальных вершин в $(s - 1)$ раз, — это указывает на то, что хорды остовного каркаса $T(v_0)$ графа, замыкают между собой только вершины d -го уровня. Таким образом, все циклы фундаментальной системы, ассоциированной с любой из проекций графа, обладают одинаковой, равной его обхвату $g = 2d + 1$, нечетной длиной. Из (6) видно, что порядок такого графа, — если он существует, — имеет единственно возможное значение.

2) $g = 2d$. Из (5) получим:

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{(s(s-1)^d - 2)}{s-2}.$$

3) $g < 2d$: $g = 2d - x$, $1 \leq x \leq 2d - 3$. Максимальному значению переменной $x = 2d - 3$ соответствует наличие в графе 3-цикла: $g = 2d - x = 3$.

Как и выше, граничное значение порядка $n(s)$ -компактного графа определяется снизу максимумом числа оригинальных вершин в $(d - 1)$ -уровневой проекции. Верхняя же граница порядка графа в зависимости от четности/нечетности x (и обхвата) определена в (3) и (4). Условия компактности получим из (5) и (6):

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{s(s-1)^{x/2} ((s-1)^{d-x/2} - 1)}{s-2}, \text{ для четных } g,$$

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{(s-1)^{(x+1)/2} (s(s-1)^{d-(x+1)/2} - 2)}{s-2}, \text{ для нечетных } g.$$

Например, для $g = 2d - 2$, получим:

$$\frac{s(s-1)^{d-1} - 2}{s-2} < n \leq \frac{s(s-1)((s-1)^{d-1} - 1)}{s-2}.$$

4. Примеры предварительного анализа и генерации графов

Ниже даны примеры использования полученных выше результатов в генерации графов с предопределенным обхватом. Такие случаи могут быть интересны, например, в приложении к проектированию топологий сетей с распределенными серверами.

К начальным условиям, задающим порядок и степень генерируемого графа, добавим длину его минимального цикла (обхвата), поэтому в отличие от [10], [11], где исходная система вершинно-полных проекций задает лишь остовный подграф искомого графа, здесь она дополнена хордой, формирующей цикл с равной обхвату длиной. Сплошными линиями на рисунках показаны ребра, определенные проекциями исходной системы проекций, а штриховыми линиями — ребра, полученные в результате ее решения.

Мы не будем приводить здесь последовательность аналитического синтеза графов с определенными выше свойствами, — решение такой задачи достаточно подробно демонстрируется примерами в [10], [11]. Однако, учитывая отмеченное отличие (наличие в исходном подграфе цикла определенной длины), для графа, изображенного на рис. 3, приведем для наглядности начальный список окружений каждой вершины, включающих в себя индексированные подмножества потенциально смежных вершин. Естественно, если вершина принадлежит санкционированному 3-циклу $K(0,1,2)$, то она уже не может входить ни в одно из потенциальных подмножеств, так как все вершины ее окружения изначально известны. Индексы при подмножествах указывают на число искомым вершин.

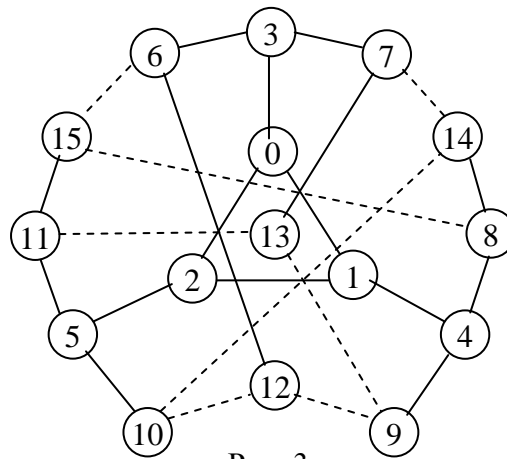


Рис. 3

$N(0) = \{1, 2, 3\},$	$N(5) = \{2, 10, 11\},$	$N(11) = \{5, 15, \{6-10, 12-14\}_1\},$
$N(1) = \{0, 2, 4\},$	$N(6) = \{3, 12, \{7-11, 13-15\}_1\},$	$N(12) = \{6, \{7-11, 13-15\}_2\},$
$N(2) = \{0, 1, 5\},$	$N(7) = \{3, 13, \{6, 8-12, 14, 15\}_1\},$	$N(13) = \{7, \{6, 8-12, 14, 15\}_2\},$
$N(3) = \{0, 6, 7\},$	$N(8) = \{4, 14, \{6, 7, 9-13, 15\}_1\},$	$N(14) = \{8, \{6, 7, 9-13, 15\}_2\},$
$N(4) = \{1, 8, 9\},$	$N(9) = \{4, \{6-8, 10-15\}_2\},$	$N(15) = \{11, \{6-10, 12-14\}_2\}.$
	$N(10) = \{5, \{6-9, 11-15\}_1\},$	

Из (6) имеем $3 \cdot 2^{d-1} - 2 < 16 \leq 4 \cdot 2^{d-1}$, — отсюда число уровней вершинно-полных проекций искомого компактного графа с одним 3-циклом равно диаметру $d = 3$. При этом согласно (2) и (4) число N_3 элементов и число реплик r_3 в 3-уровневой проекции $P_3(v_0)$, $v_0 = \{0, 1, \dots, 15\}$ равны соответственно $N_3 = 22$ и $r_3 = 6$. Равенство порядка n графа максимально возможному числу $n = n_3 = N_3 - r_3 = 16$ оригинальных вершин в его вершинно-полной проекции соответствует рассмотренному выше случаю 2 и исключает возможность появления в графе циклов с длиной, меньшей $2d$, кроме predeterminedного нами 3-цикла. Появление еще одного такого цикла привело бы к увеличению числа реплик сверх тех, что обусловлены уже имеющимся в графе 3-циклом и соразмерно уменьшило бы число оригинальных вершин в проекции до величины, меньшей заданного порядка. Исходя из этого,

стартовая система проекций нашего графа будет совместна только при отсутствии в нем циклов с длиной, меньшей $2d = 6$. Это означает, что потенциальные множества вершин каждой проекции системы не должны содержать вершин, сумма номеров уровней которых меньше шести. Таким образом, каждое потенциальное подмножество вершинно-полной проекции анализируем на присутствие в нем уже определенных этой проекцией вершин и исключаем те, сумма номера уровня которых с номером уровня содержащего ее потенциального подмножества менее шести. Скорректируем список окружений и все остальные проекции подлежащей решению системы. Например, из исходной проекции $P_3(3)$

$$P_3(3) = 3^{\{0^{\{1^{(2,4)}, 2^{(7,5)}\}}, 6^{\{12^{\{(7-11,13-15)_2\}}, \{7-11,13-15\}_1\}}, 7^{\{13^{\{(6,8-12,14,15)_2\}}, \{6,8-12,14,15\}_1\}}\}}$$

видим, что ребра (6,7), (12,7), (13,6), (12,13) недопустимы. Удалив из потенциальных подмножеств соответствующие этим ребрам вершины, получим:

$$P_3(3) = 3^{\{0^{\{1^{(2,4)}, 2^{(7,5)}\}}, 6^{\{12^{\{(8-11,14,15)_2\}}, \{8-11,14,15\}_1\}}, 7^{\{13^{\{(8-11,14,15)_2\}}, \{8-11,14,15\}_1\}}\}}$$

Решение СП, полученной после исключения недопустимых циклов, дает граф на рис. 3.

Аналогичным образом сгенерирован граф с $n = 20$, $s = 3$ и $g = 5$, изображенный на рис. 4. Из (4) получим $3 \cdot 2^{d-1} - 2 < n \leq 10 \cdot 2^{d-2}$, — диаметр искомого $20(3)$ -компактного графа с одним 5-циклом — $d = 3$. Тогда полученные из (2) и (4) значения числа элементов, числа оригинальных вершин и числа реплик в 3-уровневой проекции $P_3(v_0)$, $v_0 \in \{0,1,\dots,19\}$ равны соответственно $N_3 = 22$, $n_3 = 20$. и $r_3 = 2$. Здесь, как и в рассмотренном выше примере, максимально возможное число оригинальных вершин равно порядку графа: $n = N_3 - r_3 = 20$. Поэтому в искомом графе запретим иные, кроме предопределенного 5-цикла $K(0,1,2,3,4,0)$, циклы с длиной, меньшей $2d = 6$, иначе число реплик в

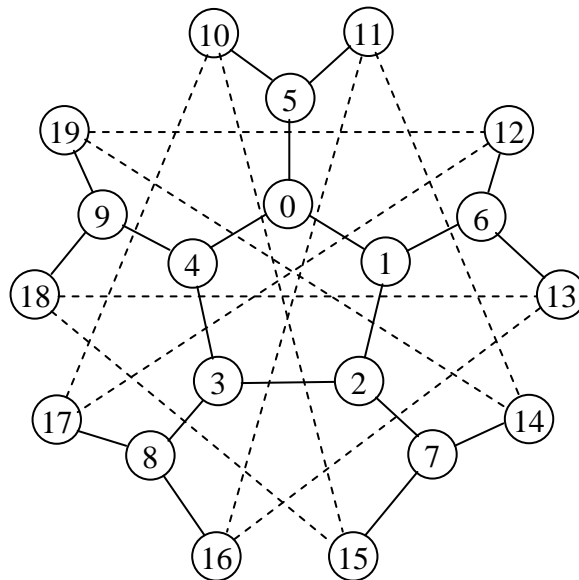


Рис. 4

его проекциях превысит обусловленное этим 5-циклом значение $r_3 = 2$. Убедиться в том, что сгенерированный на этих условиях граф не содержит таких циклов, можно составив и проанализировав результирующие проекции: множества вершин 3-го и нижележащих уровней в любой из проекций, кроме тех, ракурс которых определен вершинами, принад-

лежащими изначально санкционированному 5-циклу, не пересекаются. Заметим при этом, что 3-й уровень каждой из проекций содержит лишь по 2 реплицированные вершины, оригиналы которых расположены на том же 3-м уровне. Это говорит об эквицентрально-сти [5] полученного графа и означает также, что множества фундаментальных циклов графа, ассоциированных с ракурсными вершинами приведенных проекций, содержат лишь по 2 цикла с длиной, равной шести; остальные же $\lambda(G) - 2 = 9$ циклов обладают длиной, большей шести. Для выявления этих циклов достаточно надстроить каждую проекцию до ее полноты, т. е. еще одним уровнем.

На рис. 5 показан граф, сгенерированный для тех же, что и выше, значений порядка и степени, но с меньшим обхватом $g = 3$. Число уровней вершинно-полных проекций графа равно эксцентриситетам $e(v)$ ракурсных вершин, а при их равенстве $\forall v \in V (e(v) = d)$ — диаметру d графа. Из (4) получим число оригинальных вершин $n_d = 2^{d+1}$, определяющее верхнюю границу порядка 3-регулярного графа с заданным изначально 3-циклом. Исходя из заданного порядка, получим, что $20 \leq 2^{d+1}$ только при $d \geq 4$. Таким образом, диаметр графа с заданными здесь значениями n , s и g превышает полученное из условия компактности (6) значение $d = 3$, вследствие чего такой граф не компактен. Этот пример приведен из общих соображений с тем, чтобы полученные результаты не ассоциировались лишь с полученными выше компактными графами. Из примера видно, что результаты могут быть с успехом применены и при генерации заведомо некомпактных графов.

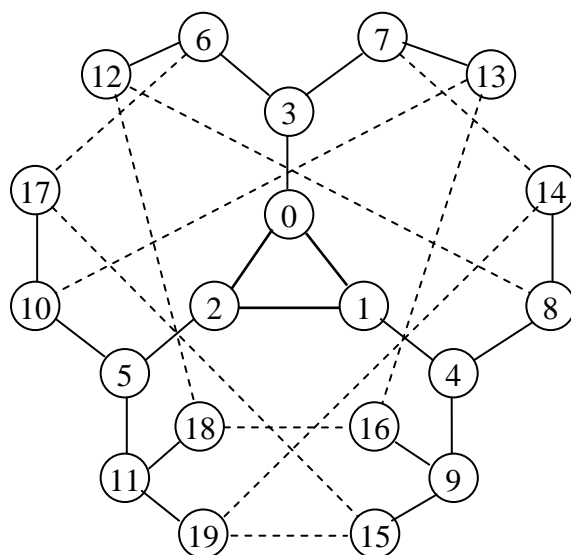


Рис. 5

Общее число элементов в 4-уровневой проекции из (2) составляет $N_4 = 3 \cdot 2^4 - 2 = 46$, при этом число реплик $N_4 - n = 26$. Увеличение числа реплик сверх обусловленных 3-циклом означает, что ассоциированная с любой из проекций искомого графа фундаментальная система циклов кроме санкционированного 3-цикла содержит и иные, более короткие, чем $2d = 8$, циклы. Приведенный здесь граф, получен в соответствии с условиями, допускающими наличие в нем единственного 3-цикла при длине $k > 6$ остальных. Убедиться в этом по графическому изображению графа достаточно сложно, но формальный анализ на пересечение множества вершин 3-го уровня любой из проекций графа с множествами вершин нижележащих уровней существенно упростит эту задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Singleton R.R. On minimal graph of maximum even girth // J.C.T. 1966. v. 1. P. 306-332.
2. Корнеев В.В., Монахов О.Г. Графы межмашинных связей однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Новосибирск, 1978. № 73. С. 93-106.
3. Корнеев В.В., Хорошевский В.Г. Структура и функциональная организация вычислительных систем с программируемой структурой // Препринт ОВС-11. Новосибирск, изд. ИМ СО АН СССР, 1979.
4. В.В. Корнеев Архитектура вычислительных систем с программируемой структурой. Новосибирск: "Наука", 1985.
5. Артамонов Г.Т. Об одном способе построения однородных эквицентральных сетей // Техническая кибернетика, 1970, №6, С. 109-114.
6. Артамонов Г.Т. Топология регулярных вычислительных сетей и сред. М.: Радио и связь, 1985.
7. Мелентьев В. А. Скобочная форма описания графов и ее использование в структурных исследованиях живучих вычислительных систем // Автометрия. 2000. Т. 38. № 4. С. 36–52.
8. Мелентьев В. А. Скобочный образ графа // 6-я Международная конференция «Распознавание образов и анализ изображений: новые информационные технологии» РО-АИ-6-2002, 21-26 октября 2002 г. Труды конференции. Великий Новгород: 2002. Т. 2. С. 365–369.
9. Мелентьев В. А. Формальные основы скобочных образов в теории графов // II Международная конференция "Параллельные вычисления и задачи управления" РАСО'2004, 4-6 октября 2004 г., Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Труды конференции. Москва: 2004. Т. 2. С. 694–706.
10. Мелентьев В. А. Аналитический подход к синтезу регулярных графов с заданными значениями порядка, степени и обхвата // Прикладная дискретная математика. 2010. № 2 (8). С. 74–86.
11. Мелентьев В. А. Компактные структуры вычислительных систем и их синтез // Управление большими системами. 2011. Вып. № 32. С. 107–112.
12. Мелентьев В. А. Актуализация описаний и реконфигурация отказоустойчивых систем // Труды III Международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления» РАСО '2006 памяти И.В. Прангишвили: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия, 2006, С. 785-800.