© 2012 г. Е.С. КУДРЯШОВА, аспирант
(ФГБОУ ВПО “Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет”)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СИСТЕМ[1]

Работа посвящена математической модели параллельной системы, обобщающей асинхронные системы и автоматы с отношением независимости. Введены дистрибутивные асинхронные автоматы и доказано, что временные дистрибутивные асинхронные автоматы обобщают временные сети Петри.

SAMPLE OF CAMERA-READY MANUSCRIPT PREPARATION FOR THE CONFERENCE PACO'2012 / E.S. Kudryashova (Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Lenina 27, Komsomolsk-on-Amur 681013, Russia, E-mail: ekatt@inbox.ru). The paper is devoted to the mathematical model of concurrent system generalizing asynchronous systems and automata with independence relation. It is introduced distributive asynchronous automata. It is proved that the time distributed asynchronous automata are generalized the time Petri nets.

1. Введение

Для описания и исследования поведения параллельных систем в настоящее время широко используются различные математические структуры, такие как временные системы переходов [1], временные структуры событий [2], временные системы переходов с независимостью [3], временные сети Петри [4, 5, 6]. На первый взгляд, понятия времени и параллелизма имеют не много общего. Однако существует большое количество примеров из разных областей, иллюстрирующих эту связь. По этой причине, было введено и изучено множество различных сетей Петри, зависящих от времени. Несмотря на то, что сети Петри являются очень удобными математическими моделями параллельных вычислительных систем, существуют задачи, для решения которых нужны более общие временные модели (см. например [7]). Для решения этой проблемы не подходит очевидное обобщение временных сетей Петри на асинхронные системы, при котором каждому переходу ставится в соответствие интервал времени. В данной работе введено обобщение асинхронных систем, позволяющее определить временные системы, частным случаем которых являются временные сети Петри.

2. Временные сети Петри

Определение 1. Временная сеть Петри - это семиэлементный кортеж

$$N = (P, T, pre, post, M_0, Eft, Lft),$$

[1]Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, № 2011-ПР-054

состоящий из конечных множеств P *и* T*, функций* $M_0 : P \to N$, $pre : T \to N^P$, $post : T \to N^P$, $Eft : T \to N$, $Lft : T \to N \cup \{\infty\}$.

Здесь N^P обозначает множество всех функций $P \to N$. Элементы $p \in P$ называются *местами*, $t \in T$ – *переходами*, $M \in N^P$ – *маркировками*, M_0 – *начальной маркировкой.* Функции Eft и Lft описывают соответственно раннее и позднее время доступности переходов, которые удовлетворяют ограничению $Eft(t) \leqslant Lft(t)$ для каждого $t \in T$ [8].

Функции pre и $post$ определяют структуру ориентированного графа, множеством вершин которого является $P \cup T$, а стрелками пары $(a, b) \in (P \times T) \cup (T \times P)$. Состояния сети Петри задаются разметками, которые получаются из начальной разметки с помощью срабатывания конечных последовательностей переходов. Переход t является доступным, если $\forall (p \in P)\ M_0(p) \geqslant F(p, t)$ и время, прошедшее с момента доступности перехода t, достигло значения Eft.

Раннее и позднее время доступности перехода t соответствует временному интервалу, в который переход t может сработать. Если же время, прошедшее с того момента, когда переход t стал доступен достигло значения Lft, то переход может сработать до тех пор, пока не будет блокирован срабатыванием другого перехода.

3. Временные дистрибутивные асинхронные автоматы

Для начала введем понятие дистрибутивного асинхронного автомата.

Определение 2. *Дистрибутивным асинхронным автоматом называется пятерка*

$$A = (S, s_0, E, I, Tran)$$

состоящая из множеств S *и* E*, элемента* $s_0 \in S$*, отношения* $Tran \subseteq S \times E \times S$ *и семейства антирефлексивных симметричных отношений* $I = (I_s)_{s \in S}$, $I_s \subseteq E \times E$.

Должны быть выполнены следующие условия

(i) $(s, a, s') \in Tran\ \&\ (s, a, s'') \in Tran \Rightarrow s' = s''$;

(ii) для любых $s \in S$, $(a_1, a_2) \in I_s$, $(s, a_1, s_1) \in Tran$ *и* $(s_1, a_2, s') \in Tran$ *существует такое* $s_2 \in S$*, что* $(s, a_2, s_2) \in Tran$ *и* $(s_2, a_1, s') \in Tran$ *(см. рис.1).*

$$\begin{tikzcd}
& s_1 \arrow[dr, "a_2"] & \\
s \arrow[ur, "a_1"] \arrow[dr, dashed, "a_2"'] & & s' \\
& s_2 \arrow[ur, dashed, "a_1"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1. Аксиома (ii) для асинхронных автоматов

Обобщим определение временной сети Петри путем введения времени в понятие дистрибутивных асинхронных автоматов.

Обозначим через $R_{\geqslant 0}$ множество всех неотрицательных вещественных чисел.

Определение 3. *Временным дистрибутивным асинхронным автоматом (A, eft, lft) называется дистрибутивный асинхронный автомат*

$$A = (S, s_0, E, I, Tran),$$

вместе с парой функций $eft : E \to R_{\geqslant 0}$, $lft : E \to R_{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющих для всех $a \in E$ неравенству $eft(a) \leqslant lft(a)$.

Введем временную асинхронную систему как (A, eft, lft), где $A = (S, s_0, E, I, Tran)$ - асинхронная система, $eft(a)$ и $lft(a)$ - временные функции.

Пример 1. Всякую временную асинхронную систему (A, eft, lft) можно рассматривать как временной дистрибутивный асинхронный автомат, полагая $I_s = I$ для всех $s \in S$.

Введем временные состояния. Определим отображение $S \times E \dot{\to} S \sqcup \{*\}$, полагая $s \cdot a = s'$, если $(s, a, s') \in Tran$. Если таких $s' \in S$ не существует, то положим $s \cdot a = *$.

Определение 4. *Временным состоянием временного дистрибутивного асинхронного автомата (A, eft, lft) называется пара (s, h), состоящая из $s \in S$ и функции $h : E \to R_{\geqslant 0} \cup \{\#\}$, таких, что*

1) $s \cdot a \in S \Rightarrow h(a) \leqslant lft(a)$;

2) $s \cdot a = * \Rightarrow h(a) = \#$.

Каждое действие $a \in E$ имеет "часы". В начале работы временное состояние равно (s_0, h_0), где $h_0(a) = 0$, если существует $s' \in S$ и переход $s \xrightarrow{a} s'$.

Определение 5. *Будем писать $(s, h) \xrightarrow{a} (s', h')$ и говорить, что действие $a \in E$ переводит временное состояние (s, h) в (s', h'), если*

(1) $s \cdot a = s' \neq * \ \& \ eft(a) \leqslant h(a)$;

(2) $(\forall b \in E)\ h'(b) = \begin{cases} \# & \textit{если } s' \cdot b = * \\ h(b) & \textit{если и только если } s' \cdot b \neq * \ \& \ (a, b) \in I_s \\ 0 & \textit{в других случаях.} \end{cases}$

Определение 6. *Для $\tau \in R_{\geqslant 0}$ будем писать $(s, h) \xrightarrow{\tau} (s', h')$ и говорить, что состояние (s, h) заменяется состоянием (s', h') при истечении времени τ, если*

(1) $s' = s$;

(2) $(\forall a \in E)\ h(a) \neq \# \Rightarrow h(a) + \tau \leqslant lft(a)$;

(3) $(\forall a \in E)\ h'(a) = \begin{cases} \# & \textit{если } s' \cdot a = * \\ h(a) + \tau & \textit{если } s' \cdot a \neq *. \end{cases}$

Предложение 1. *Определения 4–6 обобщают определение временного состояния и его изменения, введенного для сетей Петри в работе [9].*

Рассмотрим, например, асинхронную систему, состоящую из двух независимых действий a_1 и a_2 и четырех состояний

$$\begin{tikzcd} s_0 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, "a_2"'] & s_1 \arrow[d, "a_2"] \\ s_2 \arrow[r, "a_1"] & s_3 \end{tikzcd}$$

для которых известны $eft(a_i)$ и $lft(a_i)$, $i \in \{1, 2\}$. Вычислим минимальное время выполнения операций, приводящих к состоянию s_3. Временные состояния (s, h) будем рассматривать как тройки (s_i, τ_1, τ_2). Пусть $eft(a_1) \leqslant eft(a_2)$. Тогда возможен следующий путь выполнения

$$(1) \quad (s_0, 0, 0) \overset{eft(a_1)}{\rightarrow} (s_0, eft(a_1), eft(a_1)) \overset{a_1}{\rightarrow} (s_1, \#, eft(a_1)) \overset{eft(a_2)-eft(a_1)}{\rightarrow} (s_1, \#, eft(a_2)) \overset{a_2}{\rightarrow} (s_3, \#, \#)$$

Легко видеть, что полученное время, равное сумме $eft(a_1) + eft(a_2) - eft(a_1)$ будет минимальным. Следовательно, в общем случае минимальное время будет равно $max(eft(a_1), eft(a_2))$.

Вычислим максимальное время, предполагая, что $lft(a_1) \leqslant lft(a_2)$.

$$(2) \quad (s_0, 0, 0) \overset{lft(a_1)}{\rightarrow} (s_0, lft(a_1), lft(a_1)) \overset{a_1}{\rightarrow} (s_1, \#, lft(a_1)) \overset{lft(a_2)-lft(a_1)}{\rightarrow} (s_1, \#, lft(a_2)) \overset{a_2}{\rightarrow} (s_3, \#, \#)$$

Получаем максимальное время выполнения действий $max(lft(a_1), lft(a_2))$.

4. Временные сети Петри как дистрибутивные асинхронные автоматы

Напомним, что временная сеть Петри определяется как кортеж (A, Eft, Lft), где A - сеть Петри. Определим отношение порядка на N^P, полагая $M \leqslant M'$, если для всех $p \in P$ верно $M(p) \leqslant M'(p)$. Сумму и разность функций определим как $(M \pm M')(p) = M(p) \pm M'(p)$. Для $M, M' \in N^P$ и $t \in T$ запись $M \overset{t}{\rightarrow} M'$ будет означать, что выполнены следующие два условия

1) $M \geqslant pre(t)$;
2) $M' = M - pre(t) + post(t)$.

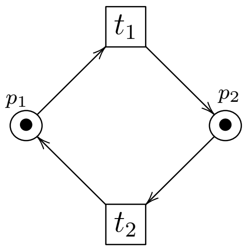
В этом случае, мы будем говорить, что маркировка M' получена из M с помощью срабатывания перехода t.

Пусть $(P, T, pre, post, M_0, Eft, Lft)$ – временная сеть Петри. Обозначим $^{\bullet}t = \{p \in P : pre(t)(p) \neq 0\}$. Для произвольной маркировки $M \in N^P$ определим отношение

$$(3) \quad I_M = \{(t_1, t_2) \in T \times T : M \geqslant pre(t_1) \ \& \ M \geqslant pre(t_2) \ \& \ ^{\bullet}t_1 \cap {}^{\bullet}t_2 = \emptyset\}.$$

Предложение 2. Временная сеть Петри $(P, T, pre, post, M_0, Eft, Lft)$ *определяет временной дистрибутивный асинхронный автомат* $(S, s_0, E, I, Tran, eft, lft)$, $S = N^P$, $E = T$, $s_0 = M_0$, $Tran = \{(M, t, M') \in N^P \times T \times N^P :$ *существует* $M \overset{t}{\rightarrow} M'\}$, *для которого* I_M *определяется по формуле (3).*

В качестве примера рассмотрим следующую ниже сеть Петри, будем обозначать ее через Ω:



Множество достижимых маркировок состоит из $M_0(1,1)$, $M_1(2,0)$, $M_2(0,2)$. На рис. 2 показан дистрибутивный асинхронный автомат, который определяет данная сеть Петри.

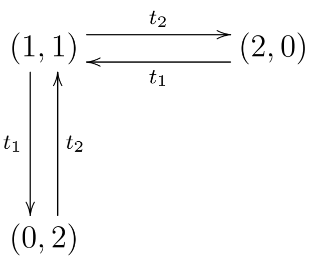


Рис. 2. Дистрибутивный асинхронный автомат для сети Петри Ω

Мы видим, что маркировкам сети Петри M_i соответствуют состояния дистрибутивного асинхронного автомата s_i, $i \in \{1,3\}$, а переходам сети t_i соответствуют действия, обозначенные аналогичным образом, $i \in \{1,2\}$. Отношения I_s для данного автомата будут иметь вид: $I_{s_0} = \{(t_1,t_2),(t_2,t_1)\}$, $I_{s_1} = \emptyset$, $I_{s_2} = \emptyset$.

Заключение

В данной статье были введены дистрибутивные асинхронные автоматы. Это позволило обобщить временные сети Петри на асинхронные системы и автоматы с отношением независимости. Введены определения временных состояний и действия событий на этих состояниях, обобщающие соответствующие определения для сетей Петри.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Henzinger T.A., Manna Z., Pnueli A. “Timed transition systems”. In Goos G., Hartmanis J., editor, *Real-Time: Theory in Practice*, Lecture Notes in Computer Science 600, Springer-Verlag, 1991, P. 226-251.

2. Вирбицкайте И.Б., Дубцов Р.С. “Семантические области временных структур событий”, *Программирование*, № 3 (2008), С. 3–20.

3. Дубцов Р.С. “Теоретико-категорные исследования временных систем переходов с независимостью”, IX Всероссийская конференция молодых ученых по математическому моделированию и информационным технологиям, г. Кемерово, 28-30 октября 2008 года http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2008/14295/dubtsov.pdf

4. Вирбицкайте И.Б., Покозий Е.А. “Использование техники частичных порядков для верификации временных сетей Петри”, *Программирование*, № 1 (1999), С. 28–41.

5. Вирбицкайте И.Б., Покозий Е.А. “Метод параметрической верификации поведения временных сетей Петри”, *Программирование*, № 4 (1999), С. 16–29.

6. Покозий Е.А. “Метод верификации свойств параллелизма временных сетей Петри”, Препринт, *Институт Систем Информатики СО РАН*, № 61. Новосибирск, 1999, 28 с.

7. Хусаинов А.А. “Математическая модель задачи о читателях и писателях”, Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления: материалы Международной науч.-практ. конф., Хабаровск, 4-6 октября 2011 г. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2011. С. 327-332.

8. Penczek W., Potrola A. “Advances in Verification of Time Petri Nets and Timed Automata”, Poland : Springer, 2006.

9. Bachmann J.P., Popova-Zeugmann L. “Time-independent Liveness in Time Petri Nets”, *Fundamenta Informaticae*, 101 (2010), P. 1–17
http://www2.informatik.hu-berlin.de/ popova/Bachm-Popova.pdf