

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛАМЕ¹

В работе описывается параллельная реализация линейризованного алгоритма решения краевой обратной динамической задачи для системы Ламе. Приводятся результаты численного моделирования.

THE PARALLEL REALIZATION SOLVING THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE DYNAMICAL LAME SYSTEM / A.N. Danilin (I. Kant Baltic Federal University, A. Nevskogo, 14, Kaliningrad, 236041, Russia, E-mail: adanilin@kantiana.ru). The paper describes the parallel implementation of the algorithm of the linearized solution of the boundary inverse dynamic problem for the Lamé system. Results of numerical testing are presented.

1. Постановка задачи

1.1 Прямая задача

Пусть R_+^3 - полупространство с границей $\Gamma = \{x \in R^3 \mid x^3 = 0\}$. Будем называть *прямой задачей* начально-краевую задачу для системы Ламе (ниже во всех формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3):

$$\rho u_{tt}^i = \frac{\partial}{\partial x^j} \sigma^{ij}, \quad \theta \quad R_+^3 \times [0, 2T], \quad \sigma^{ij} \nu_j \Big|_{\Gamma \times [0, T]} = f^i, \quad u \Big|_{t=0} = u_t \Big|_{t=0} = 0,$$

где σ - тензор напряжений, связанный с тензором деформаций $\varepsilon_{ij} = (u_{x^j}^i + u_{x^i}^j) / 2$ законом Гука $\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}$, u - вектор смещений, ν - вектор внешней нормали границы Γ . $C^{ijkl} = \lambda \delta^{ij} \delta^{kl} + \mu (\delta^{ik} \delta^{jl} + \delta^{il} \delta^{jk})$ - тензор упругости (изотропная среда). Вектор нормального напряжения f будем называть (*граничным*) *управлением* и предполагать, что $f(x, t) = r(t-s) \delta_{\Gamma}(x-x') \nu$, $x' \in \Gamma_0$, $s \in [0, T]$, где $r(t)$ - импульс Рикера, δ_{Γ} - дельта-функция Дирака на Γ , $\Gamma_0 \subset \Gamma$ - ограниченная область, по которой пробегают точечные источники (*апертура*). Заметим, что вектор-функция f всегда направлена по нормали. Решение

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00260а).

прямой задачи обозначим u^f , соответствующий тензор деформаций и тензор напряжений ε^f и σ^f , соответственно.

1.2 Обратная задача

Плотность ρ и параметры Ламе λ, μ - суть достаточно гладкие (кусочно-гладкие) функции пространственных переменных. Требуется найти ρ, λ, μ по заданному оператору реакции

$$R^{2T}, R^{2T} f = u^f |_{\Gamma_0 \times [0, 2T]}$$

Билинейные формы (относительно управлений), соответствующие кинетической и потенциальной энергии в момент времени T задаются равенствами:

$$K^T(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \rho(x) (u_t^f(x, T), u_t^g(x, T)) dx,$$

$$P^T(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} (C^{ijkl} \varepsilon_{ij}^f \varepsilon_{kl}^g)(x, T) dx.$$

Оба, квадратичных по f функционала явно определяются данными обратной задачи и нелинейно зависят от ρ, λ, μ [1-2]. Решение обратной задачи основано на линеаризации этих функционалов относительно априорных ρ_0, λ_0, μ_0 .

1.3 Дискретная постановка

Будем называть Γ_0 - прямоугольник и $\Pi^T \supset \Omega^T$ - параллелепипед. На части границы $\partial \Pi^T \setminus \Gamma_0$ зададим нулевые условие Неймана. Введем триангуляционную сетку в Π^T и соответствующие базисные векторные поля $\varphi_p, p=1, \dots, 3N$ (N - число узлов сетки), соответствующие стандартным базисным функциям метода конечных элементов (МКЭ). Тогда аппроксимация Галеркина $u_N^f(x, t) = \sum_{p=1}^{3N} U_p(t) \varphi_p(x)$ решения прямой задачи приводит к задаче Коши

$$MU_{tt} + KU = F,$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0,$$

где

$$M_{pq} = \int_{\Omega} \rho(x) (\varphi_p(x), \varphi_q(x)) dx,$$

$$K_{pq} = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} [\lambda \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^j} + \mu \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^i} + \mu \frac{\partial \varphi_q^j}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^i}{\partial x^j}] dx$$

- матрицы масс и жесткости, соответственно,

$$F_{p\alpha}(t) = \int_{\Gamma} (\varphi_p(x), f_{\alpha}(x, t)) d\Gamma$$

- матрица-функция граничных управлений. Заметим, что стандартные базисные функции МКЭ обеспечивают равенства $(u_N^f)^1(x_p, t) = U_p(t), p=1, \dots, N, (u_N^f)^2(x_p, t) = U_p(t), p=N+1, \dots, 2N,$

$(u_N^f)^3(x_p, t) = U_p(t)$, $p = 2N + 1, \dots, 3N$. Будем использовать кусочно-постоянную модель плотности и коэффициентов Ламе. Тогда

$$M_{pq} = \sum_{k=1}^{N_\Delta} \rho_l M_{pq}^l, \quad M_{pq}^l = \int_{\Delta_l} (\varphi_p(x), \varphi_q(x)) dx, \quad l = 1, \dots, N_\Delta,$$

$$K_{pq} = \sum_{k=1}^{N_\Delta} (\lambda_l K_{\lambda pq}^l + \mu_l K_{\mu pq}^l), \quad K_{\lambda pq}^l = \int_{\Delta_l} \lambda \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^j} dx,$$

$$K_{\mu pq}^l = \int_{\Delta_l} [\mu \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^j} + \mu \frac{\partial \varphi_q^i}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi_p^j}{\partial x^i}] dx, \quad l = 1, \dots, N_\Delta.$$

Данные обратной задачи – компоненты вектор-функции $U_p(t)$, $t \in [0, 2T]$, соответствующие граничным узлам $x_p \in \Gamma_0$. Аналогами билинейных форм (1,2) являются матрицы

$$C^T = U^*(T) M U(T), \quad P^T = U^*(T) K U(T),$$

(* означает транспонирование), которые, как можно показать, явно определяются данными обратной задачи.

1.4 Алгоритм реконструкции

Пусть (кусочно-постоянные) коэффициенты ρ, λ, μ лежат в некоторой ε -окрестности «фоновых» коэффициентов ρ_0, λ_0, μ_0 . В силу непрерывной зависимости решения прямой задачи от коэффициентов уравнения имеет место

$$U_0^*(T) M U_0^*(T) = C^T + O(\varepsilon), \quad U_0^*(T) K U_0^*(T) = P^T + O(\varepsilon),$$

где $U_0(T)$ соответствует ρ_0, λ_0, μ_0 и тем же управлениям. Рассмотрим линейные уравнения относительно $\tilde{\rho}_k, \tilde{\lambda}_k, \tilde{\mu}_k$

$$A\tilde{\rho} := U_0^*(T) \tilde{\rho}_l M^l U_0^*(T) = C^T,$$

$$B(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) := U_0^*(T) (\tilde{\lambda}_l K_\lambda^l + \tilde{\mu}_l K_\mu^l) U_0^*(T) = P^T. \quad (1)$$

Тогда $(\tilde{\rho}_k - \rho_k) U_0^*(T) M^k U_0^*(T) = O(\varepsilon)$ (и аналогично для λ, μ). Но некорректность обратной задачи влечет плохую обусловленность линейных отображений

$A: R^{N_\Delta} \rightarrow R^{N_c(N_c+1)/2}$, $B: R^{2N_\Delta} \rightarrow R^{N_c(N_c+1)/2}$ плохо обусловлены. (Более того, существует гипотеза, что отображение B , даже не инъективно для рассматриваемых управлений). Поэтому для решения уравнений (1) необходима регуляризация. В численных примерах, приведенных ниже, регуляризация уравнений (1) состояла в том, что использовалась кусочно-постоянная модель $\tilde{\rho}, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$ на более грубой сетке. Кроме того, использовались априорные ограничения на коэффициенты (задавался априорный диапазон значений). В сейсмике часто считается выполненным определенное соотношение между скоростями продольных и поперечных волн. В расчетах использовалось априорное соотношение $c_p / c_s = 1.8$, что позволяет уменьшить число неизвестных.

2. Параллельная реализация в среде Matlab

При решении обратной задачи возникает системы линейных уравнений (1) порядка N^3 , где N -количество неизвестных. В задаче $N \geq 19000$, это обусловлено параметрами среды. Таким образом возникает сложность в вычислении матрицы A :

$$A = K^* \cdot K, \text{ где } K - \text{матрица размерности } N^2 \times N.$$

Расчет блока матрицы K не зависит от расчета других блоков, поэтому расчет всей матрицы можно проводить параллельно. Но возникает сложность в том, что не хранить всю матрицу в оперативной памяти, поэтому каждый блок матрицы записывается в отдельный файл. Схема работы алгоритма параллельного вычисления приведена на рис. 1.

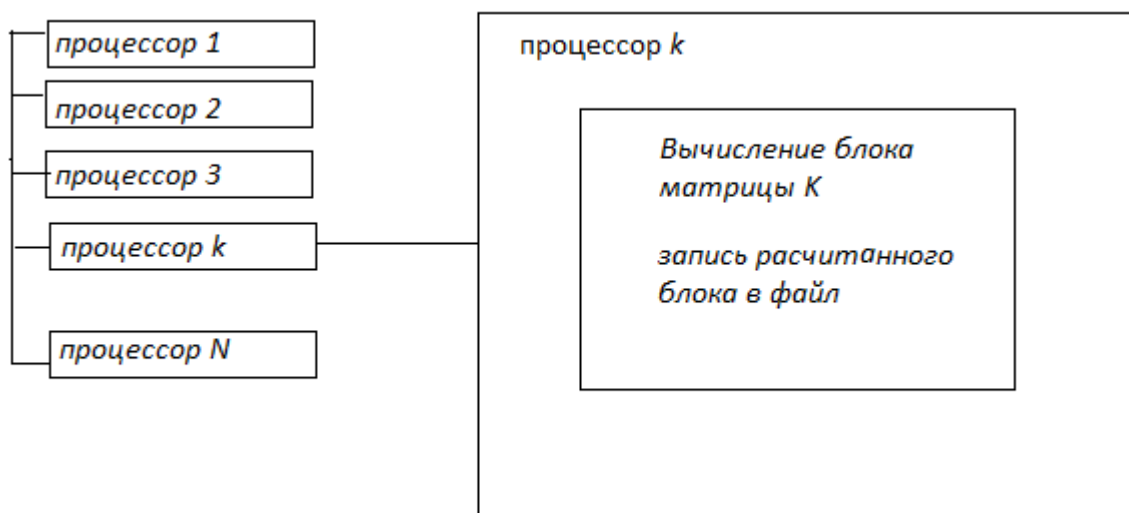
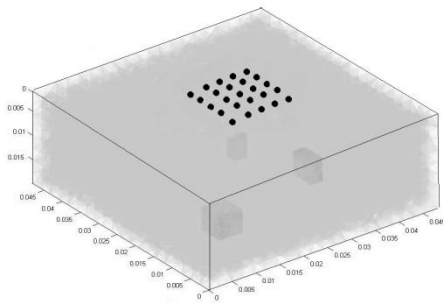


Рис. 1. Схема параллельного вычисления матрицы K

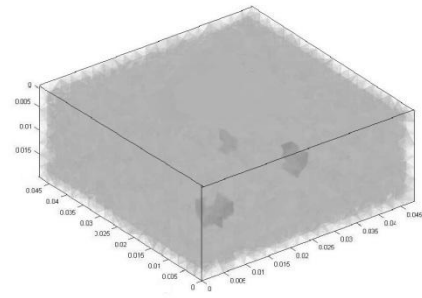
Для вычисления матрицы A , на каждом процессоре считываем блок матрицы K и вычисляем произведение $K^* \cdot K$.

3. Численные эксперименты

Рассматривались две небольшие трехмерные модели: модель с включениями и модель с границей. Параметры задачи следующие: $T = 0.01c$, размеры области $\Pi^T : 48 \times 48 \times 19,2(m)$, количество тетраэдров 19 200, преобладающая частота импульса Рикера 30Гц, скорость продольных волн 1600 - 2000 (м/с). Количество источников – 25, количество задержек по времени – 50. Т.е. количество управлений – 1250. Ниже на рисунках представлены модели и реконструкции плотности и скорости продольных волн.

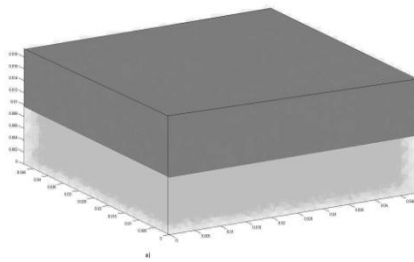


а)

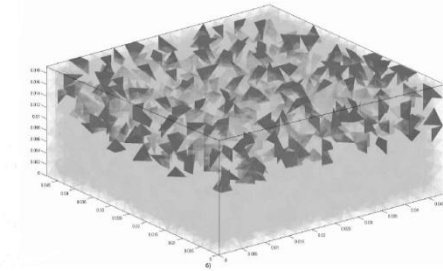


б)

Рис. 2 а) Модель скорости продольных волн, «включения»; б) Реконструкция

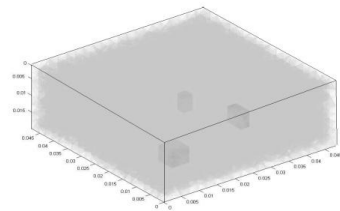


а)

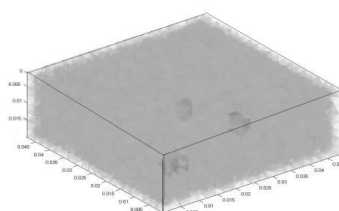


б)

Рис. 3 а) Модель скорости продольных волн, «граница»; б) Реконструкция

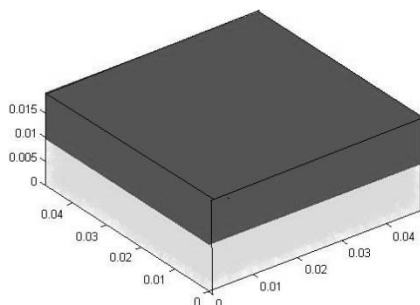


а)

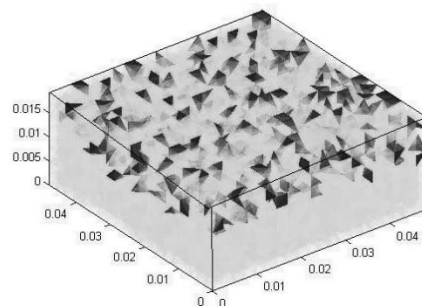


б)

Рис. 4 а) Модель плотности, «включения»; б) Реконструкция



а)



б)

Рис. 5 а) Модель плотности, «граница»; б) Реконструкция .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belishev M. I.* Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC-method) // Inverse Problems. 1997. 13. R1-R45.
2. *Belishev M. I.* Boundary Control Method in Dynamical Inverse Problems – An Introductory Course by M.I.Belishev. Gladwell G.M.L., Morassi A., Editors (2011). Dynamical Inverse Problems: Theory and Application. CISM Courses and Lectures, Vol. 529, Wien, Springer, p. 85-150
3. http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/distcomp/distcomp.pdf
4. http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/mdce/mdce.pdf