© 2012 г. И.М. ЧХЕИДЗЕ, д-р техн. наук
Л.Ш. ТОКАДЗЕ, канд. физ.-мат. наук
С.Н. ОКРОМЧЕДЛИШВИЛИ
(Грузинский Технический Университет, Тбилиси)

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К АНАЛИЗУ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ И МОДЕЛИРОВАНИЮ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В работе приведены результаты исследования применения фрактальной размерности к анализу временных рядов, описывающих динамическое состояние сложных систем, а также к моделированию совокупности распределенных в топологическом смысле объектов (сетей).

Численные эксперименты и расчеты фрактальной размерности совокупности множества точек, размещенных на плоскости, и представляющих узлы информационной сети, показали что:

1) Фрактальная размерность меньше эвклидовой Dc<DE, где DE – эвклидова размерность DE=2.
2) Распределение корреляционной размерности в зависимости от ε, показало, что с возрастанием ε, фрактальная размерность (Dc → 0) совокупностьи точек уменьшается. Это означает как бы стягивание совокупности точек в одну большую точку. При уменьшении ε (ε → 0) размерность множества точек увеличивается, стремясь к значению DE. Эксперименты проводились для разных законов распределения случайных чисел.

Получены результаты оценки фрактальной размерности и показателя Херста. Значения фрактальной размерности D определены по известной зависимости D=2-H, где D – есть фрактальная размерность процесса, а H – показатель эмпирического закона Херста. H=0.795 для частоты кардиоритма и для отрезка сейсмограммы H=0.749. Анализ обоих процессов показал, что они относятся к классу персистентных процессов, когда тенденция возрастания процесса в будущем сохраняет тенденцию к возрастанию (вероятностно).

Реализация составленных алгоритмов и моделирование в среде MathCad намного упростило вычесление.

FRACTAL DIMENSION WITH REFERENCE TO MODELING OF TOPOLOGICAL NETWORKS AND THE ANALYSIS OF TEMPORARY SERIES / I. CHKHEIDZE, L. TOKADZE, S. OKROMCHEDLISHVILI (Georgian Technical Univesity, 77 kostava str. Tbilisi, Georgia. E-mail: Irmikh2002@mail.ru, giolala2010@hotmail.com, sophiaokromchedlishvili@yahoo.com). In work results of research of use of Fractal dimension are given to the analysis of the temporary series, and also to modeling of set of the objects (networks) distributed in topological sense.

Numerical experiments and calculations of Fractal dimension of set of a set of the points placed on the plane, and representing knots of information network, showed that:

1) Fractal dimension less evklidovy Dc<DE, DE dimension of evklidovy where DE=2.
2) Distribution of correlation dimension depending on ε, showed that with increase ε, Fractal dimension (Dc → 0) decrease . At reduction ε (ε → 0) dimension of a set of points increases, aspiring to DE value. Experiments were carried out for different laws of distribution of random numbers.

The analysis of the temporary series are given. Results of an assessment of Fractal dimension and Hurst's parameter H are received. Values of Fractal dimension D are determined by known dependence of D=2-H, where D – are Fractal dimension. H=0.795 for frequency cardiac rate and for a seismogram H=0.749. The analysis of both processes showed that they belong to the class of persistence processes, when the tendency of increase of process in the future keeps a tendency to increase (is likelihood).

Realization of the made algorithms and modeling in the environment of MathCad much more simplified calculation..

1. Введение

Существующие тенденции развития распределенных сетей свидетельствует о необходимости моделирования и оптимизации сетей огромных размеров. В связи с этим актуальным становятся и задачи анализа сложных телекоммуникационных сетей на системном уровне, не прибегая к деталным описаниям, и изучением их новых особенностей, обусловленных в основном сложной геометрией и топологией. Одна из таких особенностей связана к зависимостью движения информационных потоков в сложных телекоммуникационных сетях от их топологической размерности. Сложные сети, несмотря на их внешне нерегулярную структуру, характеризуются некоторым порядком, обусловленным внешними огранечениями и моделью их роста. Данное обстоятельство позволяет использовать метод определения размерности топологии этих сетей, основанный на приложении свойства подобия, присущего фракталам [1,2,3]. При этом топология глобальной информационной сети является примером случайного фрактала, поскольку её малая часть подобна целой. Так, топология сети сотовой связи в масштабе отдельного городского района, подобна сети городского масштаба и т.д. В работе[2] предложена методика моделирования и синтеза больших сетей, основанная на применении функции плотности узлов и описываемая степенной функцией с фрактальной размерностью. Значения показателя степени фрактальности сетевого графика приведены и в работе [3], где определены численно характеристики фрактальности процессов данных в беспроводных сетях, а также говорится об использовании результатов для принятия решения о способе управления этими процессами.

Для диагностики технических объектов и систем чаще всего используются временные ряды, которыми фиксируются изменения контролируюмых параметров с течением времени [4].

Целью настоящей работы являлось вычисление фрактальной размерности на основании корреляционной функции для моделирования топологии множества распределенных объектов и анализа временных рядов. Реализация соотвествующих алгоритмов осуществлялась в программной среде MathCad.

2. Фрактальный характер топологии большой сети

В работе [2] приведен пример подсчета числа узлов транспортной сети г.Казани и г.Парижа в зависимости от радиуса с началом в географическом центре города. Для Казани фрактальная размерность системы узлов Dc=1,32. В [2,3] рассмотрен критерий согласования топологии большой сети с геометрией объекта, на котором она размещается. Телекоммуникационные сети, в виду большой связанности, предполагают множественность маршрутов доставки сообщений до получателя. От этого меняется их фрактальная размерность. В действительности узлы сети образуют фигуру с размернотью $1<D_C<2$. Чем гуще и распределенней расположены узлы сетей, тем ближе к 2-м размернотъ топологии сети. В зависимости от занятия узлов сети изменяется путь доставки сообщений, а следовательно, изменяется фрактальная размерность данной области D_C [2].

Подсчитав размерность топологии сети, можно оценить системные свойства сети и найти общие информационные закономерности движения потоков данных как функцию размерности. В работе [3] также доказана зависимость уровня фрактальности суммарного потока от самоподобных (фрактальных) свойств потоков, которые он в себе содержит.

3. Моделирование рассчета фрактальной размерности совокупности точек (узлов сети)

В общем случае любое n-мерное многообразие в n-мерном евклидовом пространстве имеет размерность D_E (целое число). Следовательно, фрактальная размерность, отличная от целочисленной, характеризует геометрические объекты с более сложной структурой. Известно несколько видов оценивания фрактальной размерности [1,2], но вычисление фрактальной размерности на практике производится на основании корреляционной размерности:

(1) $$D_C = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln C(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

где $C(\varepsilon)$ – корреляционная функция.

$C(\varepsilon)$ вычисляется, как правило, как отношение количества точек n, попарные расстояния между которыми меньше ε , к квадрату общего числа точек N.

(2) $$C(\varepsilon) = \frac{n}{N^2}$$

ε- размер геометрической структуры, которой покрывается множество точек.

Расстояние между точками $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ определеяется, обычно, как

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Следовательно, в начале нужно подсчитать число точек n, расстояние между которыми не превышает $d \le \varepsilon$ ε – задается .На пример: ε=0.1; 0.2; 0.3…

Для моделирования рассчета фрактальной размерности совокупности множества точек, нами генерировались последовательности равномерно, нормально и логистически распределенных величин. Все эти операции выполнялись в среде MathCad, где как генерирование, так и подсчет количества “n” точек в интервале, не превышающем ε , не представляет труда. Координаты точек формировались генераторами случайных чисел выше приведенных законов распределения и располагались по осям квадрата, максиальная сторона которого равна максимальному значению сгенерированных случайных чисел. Топология совокупности точек для ровномерно, нормально и логистически распределенных точек представлена на рис.1а, рис.1б, рис.1в. На рис.2а, рис.2б, рис.2в изображены полученные соответствующие этой топологии распределения корреляционной размерности.

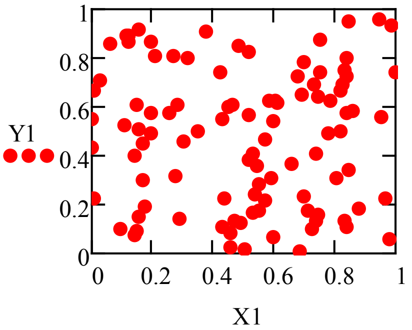

Рис. 1а. Топология равнамерно распределенных точек

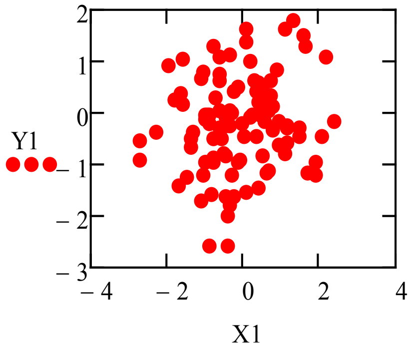

Рис.1б. Топология нормально распределенных точек

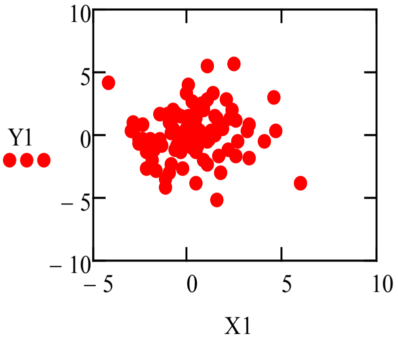

Рис. 1в. Топология логистически распределенных точек

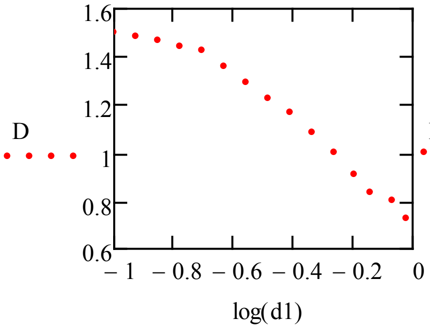

Рис. 2а. Распределение корреляционной размерности для равномерного распределения

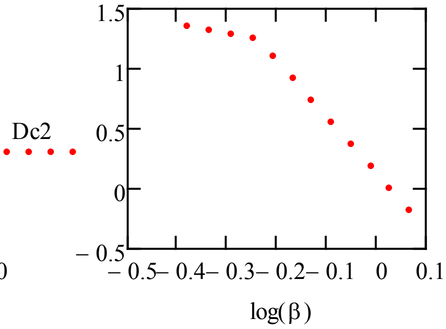

Рис.2б. Распределение корреляционной размерности для нормального распределения

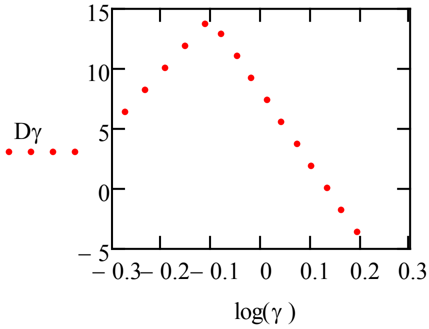

Рис.2в. Распределение корреляционной размерности для логистического распределения

4. Определение размерности временного ряда

Описанный выше метод оценки корелационной размерности очевиден, когда имеется сеть узлов.

Но если хотим определить размерность временного ряда, описывающего поведение реального процесса,когда число полученных значений превышает тысячи, этот вышеприведенный метод требует затраты такого большего промежутка времени, что представляется мало эффективным. Известно, что одним из методов определения фрактальнорй размерности, является метод нормированного размаха Херста (R/S – метод) [1,2]. При этом фрактальная размерность D связана с показателем Херста(H) по следующему выражению. D=2-H, где H – показатель Херста. Мы определили показатель H для двух процессов, отображающих изменение частоты кардиоритма и отрезка сейсмограммы. H=0.795 для частоты кардиоритма и для отрезка сейсмограммы H=0.749.

Соответственно, фрактальная размерность первого процесса равна D=2-H=2-0.795=1.205, а второго процесса равна D=2-H=2-0.749=1.251.

Исследование временных рядов базируется на идее, что удовлетворительную геометрическую картину поведения системы [3] можно получить, если вместо переменных, входящих в исходную систему, использовать так называемые векторы задержек наблюдаемой $z_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots x_{i+m-1}$. Впервые данный подход к анализу временных рядов был математически обоснован в работе Ф.Такенса [2,3].

В MathCad программной среде есть возможность определения корреляции готовыми корреляционными функциами. Известно также, что описание поведения динамической системы возможно последовательностью значений процесса с задержкой [4]. Это дало право определить зависимость логарифма корреляционной функции в зависимости от сдвига (задержки) простым образом. Результаты приведены для отрезка сейсмограммы, содержающего 10^3 значений.

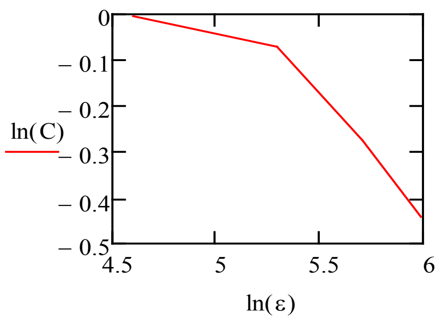

Рис. 3а. Зависимость логаритма корреляционной функции от логаритма размера ε

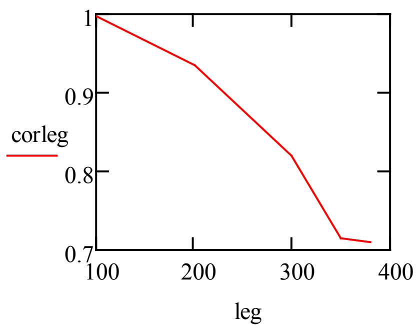

Рис. 3б. Зависимость корреляционной функции в зависимости от задержки

На рис. 3а и рис. 3б приведены результаты зависимости логарифма корреляционной функции (ln(C)) от логаритма ε (размера геометрической структуры) и корреляционной функции (corleg) от задержки (leg) для сейсмограммы, содержащей 10^3 значений.

Приведенные результаты свидетельствуют о том, что с возрастанием задержки (lag) значение коррелляционной функции уменьшается, а следовательно, уменьшается и фрактальная размерность.

В результате проведенных исследований можно заключить:

1.Расчеты фрактальной размерности совокупности множества точек, размещенных на плоскости и представляющих узлы информационной сети, показали что:

1) Фрактальная размерность меньше эвклидовой $D_c<D_E$, где D_E – эвклидова размерность $D_E=2$.
2) *Dc* Распределение корреляционной размерности в зависимости от ε, показало, что с возрастанием ε, фрактальная размерность ($D_c \to 0$) совокупности точек уменьшается. При уменьшении ($\varepsilon \to 0$) размерность множества точек увеличивается, стремясь к значению D_E.

Определение зависимости свойств сетей от фрактальной размерности может сыграть существенную роль в предсказанни их развития и повышения эффективности спользования.

2.Реализация составленных алгоритмов в среде MathCad намного упростило вычесление фрактальной размерности для временных рядов, отражающих изменение частоты кардиоритма и отрезка сейсмограммы. Получены результаты оценки фрактальной размерности и показателя Херста. Значения фрактальной размерности D определены по известной зависимости D=2-H, где D – есть фрактальная размерность процесса, а H – показатель эмпирического закона Херста. H=0.795 для частоты кардиоритма и для отрезка сейсмограммы H=0.749. Таким образом оба процесса относятся к классу персистентных процессов, когда тенденция возрастания процесса в будущем сохраняет тенденцию к возрастанию (вероятностно).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.Федер.* «Фракталы» Москва, Изд. «Мир», 1991, 249 с.
2. *Евдокимов Ю.К., Шахтурин Д.В.* Фрактальный характер топологии сложных сетей. Материалы IV международной конференции “Методы и средства управления технологическими процессами ” Саранск: Изд-во Мордов ун-та, 2007, 244-251
3. *Жалейко Е.В. Воропаева В.А.* «Исследование характеристик фрактальных процессов потоков данных мультисервисных сетей». http://masters/donntu:edu.ua/2011/fkita/zhaleyko/diss/index.htm//
4. *В. Бутаков, А Граковский* «Оценка уровня стохастичности временных рядов произвольного происхождения при помощи показателя Херста.» Computer Modelling and New Technologies, 2005, vol 9, #2, 27-32.