© 2012 г. А.В. ПАНЮКОВ, д-р физ.-матем. наук
(Южно-Уральский государственный университет)

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММЫ МИНКОВСКОГО ДЛЯ ДВУХ ПОЛИЭДРОВ СИСТЕМОЙ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ[1]

Любой выпуклый полиэдр представим как множество решений некоторой системы линейных неравенств. Алгебраическая сумма по Минковскому выпуклых полиэдров $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ также является выпуклым полиэдром, и следовательно также представим как множество решений некоторой системы линейных неравенств. В статье предложен полиномиальный алгоритм решения указанной задачи, основанный на формировании ряда избыточных ограничений в представлении слагаемых и их трансляции в результирующее представление. Предложен эффективный способ использования параллельных и распределенных вычислений для реализации алгоритма.

THE LINEAR INEQUALITIES SET REPRESENTATION OF MINKOWSKI'S SUM FOR TWO POLYHEDRONS / A.V. Panyukov (South Ural State University, Lenina Ave.76, Chelyabinsk 454080, Russia, E-mail: anatoly.panyukov@gmail.com). A convex polyhedron is represented as the linear inequalities solutions set. Minkowski's sum of two convex polyhedrons $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ is polyhedron as well is represented as the linear inequalities solutions set. Polynomial algorithm of solving this problem based of forming number of extra inequalities in the summands representation and them translation to resultant representation is presented in the paper. Usage of parallel and distributed computation for effective algorithm Implementation is suggested.

1. Введение

Задача оценивания состояния динамических систем при наличии неопределенных, но ограниченных мешающих факторов, занимает важное место в теории идентификации. Начиная с пионерской работы F.C. Schweppe [1], этой задаче посвящается все возрастающее количество исследований, включая фундаментальные работы А.Б. Куржанского [2] и Ф.Л. Черноусько [3]. Исходя из требований повышения точности оценивания состояния, в [4] было предложено использовать многогранники, заданные своими вершинами. В работе [5] предложено использование двойного описания (вершинами и гранями) многогранника. В работах [6], [8] развиваются идеи оценивания с использованием только граней для описания многогранников. В этом случае информационные

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 10-07-96003-р_урал_а

множества аппроксимированы системами линейных неравенств (гранями многогранников), а для описания эволюции объектов используется алгебраическая сумма по Минковскому для подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, которая по определению равна

$$S = X + Y = \{z = x + y : \ x \in X, \ y \in Y\}\,. \tag{1}$$

Представление (1) для подмножества $S \subset \mathbb{R}^n$ использует $2n$ переменных, т.е. в два раза превышает необходимое количество. В связи с этим, актуальной проблемой становится поиск представления суммы двух полиэдров, представленных как множества решений систем линейных неравенств $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leqslant a \in \mathbb{R}^{m_a}\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Bx \leqslant b \in \mathbb{R}^{m_b}\}$, в виде множества решений системы неравенств

$$S = \{x : Cx \leqslant c \in \mathbb{R}^{m_c}\}. \tag{2}$$

Известные подходы (например, [9] – [12]) к решению данной проблемы, основанные на последовательном исключении переменных, ориентированы на уменьшение пространственной сложности реализующих их алгоритмов. В целом алгоритмы, реализующие указанные подходы, имеют экспоненциальную вычислительную сложность. Современный уровень развития вычислительной техники менее критичен к объему используемой памяти и позволят применять алгоритмы с полиномиальной вычислительной сложностью для решения задач большой размерности. В статье предложен полиномиальный алгоритм решения указанной задачи, основанный на формировании ряда избыточных ограничений в представлении слагаемых и их трансляции в результирующее представление. Предложен эффективный способ использования параллельных и распределенных вычислений для реализации алгоритма.

2. Теоремы о представлении

Пусть $x \in X$, $y \in Y$. Рассмотрим $z = x + y$. Имеем

$$Az = A(x + y) = Ax + Ay \leqslant b + \max_{y:By\leqslant b} Ay,$$

$$Bz = B(x + y) = By + Bx \leqslant b + \max_{x:Ax\leqslant a} B.$$

Следовательно,

$$z = x + y \in \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \ Az \leqslant a + \max_{y:By\leqslant b} Ay, \ Bz \leqslant b + \max_{x:Ax\leqslant a} Bx \right\}.$$

Таким образом, нами доказана

Т е о р е м а 1. *Если*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leqslant a \in \mathbb{R}^{m_a}\}, \tag{3}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \ Bx \leqslant b \in \mathbb{R}^{m_b}\}, \tag{4}$$

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \ Az \leqslant a + \max_{y:By\leqslant b} Ay, \ Bz \leqslant b + \max_{x:Ax\leqslant a} Bx \right\}, \tag{5}$$

то $Z \supseteq X + Y$.

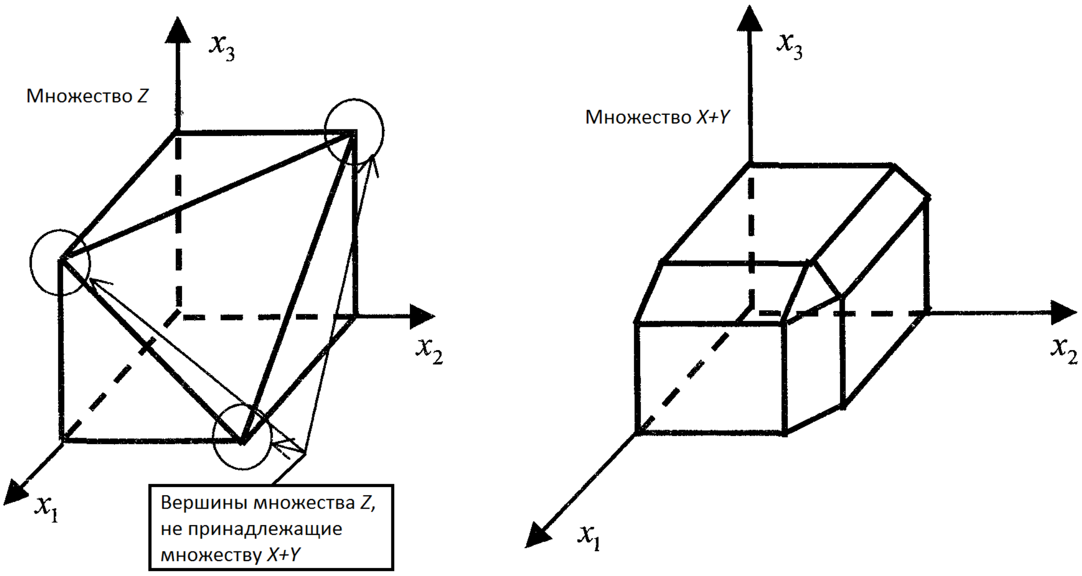

Рис. 1. Иллюстрация множеств Z и $X+Y$, описываемых равенствами (7)

В общем случае обратное включение $Z \subseteq X+Y$ не имеет место. В качестве иллюстрации этого приведем пример из работы [8]. Пусть
(6)

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & & & \leqslant & 1, \\ & x_2 & & \leqslant & 1, \\ & & x_3 & \leqslant & 1, \\ -x_1 & & & \leqslant & 0, \\ & -x_2 & & \leqslant & 0, \\ & & -x_3 & \leqslant & 0 \end{array} \right\}; \; Y = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & \leqslant & 1, \\ -x_1 & & & \leqslant & 0, \\ & -x_2 & & \leqslant & 0, \\ & & -x_3 & \leqslant & 0 \end{array} \right\}.$$

В данном случае (см. также рис. 1)

$$(7) \quad Z = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & & & \leqslant & 2, \\ & x_2 & & \leqslant & 2, \\ & & x_3 & \leqslant & 2, \\ -x_1 & & & \leqslant & 0, \\ & -x_2 & & \leqslant & 0, \\ & & -x_3 & \leqslant & 0, \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \leqslant & 4 \end{array} \right\};$$

$$X+Y = Z \cap \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{rrrcl} x_1 & +x_2 & & \leqslant & 3, \\ & x_2 & +x_3 & \leqslant & 3, \\ x_1 & & +x_3 & \leqslant & 3 \end{array} \right\}.$$

Легко заметить, что представление $X+Y$ отличается от представления Z наличием неравенств, представляющих трансляцию в множество Z суммы некоторых пар неравенств в представлении множества X. Как будет видно из дальнейшего изложения, этот факт имеет определяющее значение при построении полиномиального алгоритма.

Пусть система неравенств $\tilde{A}x \leqslant \tilde{a}$ содержит суммы всех возможных пар неравенств системы $Ax \leqslant a$. Пусть также система неравенств $\tilde{B}x \leqslant \tilde{b}$ содержит суммы всех возможных пар неравенств системы $Bx \leqslant b$.

Т е о р е м а 2. *Если*

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leqslant a \in \mathbb{R}^{m_a}\}, \tag{8}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \ Bx \leqslant b \in \mathbb{R}^{m_b}\}, \tag{9}$$

$$S = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} s \leqslant \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a} \end{pmatrix} + \max_{y: By \leqslant b} \left[\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} y \right], \right. \\ \left. \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} s \leqslant \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b} \end{pmatrix} + \max_{x: Ax \leqslant a} \left[\begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} x \right] \right\}, \tag{10}$$

то $S = X + Y$.

Доказательство теоремы приведено в Приложении 1.

Из теоремы 2 следует, что для нахождения представления суммы по Минковскому полиэдров X и Y достаточно решить $m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}$ задач линейного программирования

$$\max_{y:\ By \leqslant b} A_i y, \quad i = 1, 2, \ldots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}, \tag{11}$$

и $m_b + \mathrm{C}^2_{m_b}$ задач линейного программирования

$$\max_{x:\ Ax \leqslant a} B_i x, \quad i = 1, 2, \ldots, m_b + \mathrm{C}^2_{m_b}, \tag{12}$$

где A_i, $i = 1, 2, \ldots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}$ и B_i, $i = 1, 2, \ldots, m_b + \mathrm{C}^2_{m_b}$ – все возможные строки матриц

$$\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

Поскольку задача линейного программирования имеет полиномиальную сложность, а число решаемых задач $m_a + m_b + \mathrm{C}^2_{m_a} + \mathrm{C}^2_{m_b}$ имеет полиномиальную зависимость от числа бит, требуемых для кодирования исходных данных, т.е. матриц $A, a, B, b,$, то имеет место

Т е о р е м а 3. *Задача нахождения представления суммы полиэдров* $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant a \in \mathbb{R}^{m_a}\}$ *и* $Y = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Bx \leqslant b \in \mathbb{R}^{m_b}\}$ *в виде* $X + Y = Z = \{x : Cx \leqslant c \in \mathbb{R}^{m_c}\}$ *имеет полиномиальную сложность.*

3. Алгоритмы нахождения представления суммы двух полиэдров

Предположим, что имеется вычислительная система, позволяющая независимо выполнять N процессов. Далее для краткости ограничимся расмотрением алгоритма решения задач семейства (11). Алгоритм решения задач семейства (12) с точностью до обозначений будет таким же.

Таблица 1. Декомпозиция симплекс-таблицы по процессорам

Процесс $K = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ N$				
T^1_{00}	$T^1_{0\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$	$T^1_{0\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$	$\cdots$	$T^1_{0\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$
T^2_{00}	$T^2_{0\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$	$T^2_{0\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$	$\cdots$	$T^2_{0\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T^{m_a}_{00}$	$T^{m_a}_{0\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$	$T^{m_a}_{0\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$	$\cdots$	$T^{m_a}_{0\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$
$T_{10} = X_{B1}$	$T_{1\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$	$T_{1\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$	$\cdots$	$T_{1\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$
$T_{20} = X_{B2}$	$T_{2\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$	$T_{2\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$	$\cdots$	$T_{2\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$T_{m0} = X_{Bm}$	$T_{m\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+1}$	$T_{m\lceil\frac{(K-1)n}{N}\rceil+2}$	$\cdots$	$T_{m\lceil\frac{Kn}{N}\rceil}$

Тривиальный метод равномерного распределения задач из семейств (11) по процессам и их независимое решение недостаточно неэффективен, т.к. не учитывает общность условий решаемых задач.

Действительно, все задачи семейства (11) имеют одинаковую систему ограничений $By \leqslant b$ и различаются в пределах семейства только целевыми функциями. Задачи с близкими относительно значений псевдометрики

$$\rho(A_i, A_j) = \left\| \frac{A_i}{\|A_i\|} - \frac{A_j}{\|A_j\|} \right\|,\ i = 1, 2, \ldots, m_a \tag{13}$$

целевыми функциями имеют близкие оптимальные базисы. Одно допустимое базисное решение может оказаться оптимальным сразу для нескольких целевых функций. Эффективную последовательность решения задач дает решение задачи коммивояжера в полном графе с множеством вершин $I_A = \{A_i :\ i = 1, 2, \ldots, m_a\}$ и весовой функцией $\rho(*, *)$ на множестве ребер. Для задачи коммивояжера известно множество эффективных приближенных алгоритмов , в том числе алгоритмы автора статьи [13, 14].

Изложенное выше дает основания считать разумным решение всего семейства задач с использованием общей симплекс-таблицы и применением распараллеливания по ее столбцам на число блоков равное числу возможных процессов N.

В работах [15, 16] приведен эффективный способ декомпозиции, в соответствии с которым все столбцы симплекс-таблицы, за исключением левого столбца, делятся в равных пропорциях между N процессами, левый столбец, т.е. вектор значений базисных переменных, и вектор значений целевых функций на нем рассылаются всем процессам и обрабатываются ими независимо.

Пример разбиения симплекс-таблицы T на блоки $T(K),\ K = 1, 2, \ldots, N$ представлен в табл. 1. В верхнем блоке осуществляется преобразование целевых функций, т.е. строк $A_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_a$ в соответствии с симплекс-методом, а в нижнем блоке – преобразование ограничений, т.е. строк $B_i,\ i = 1, 2, \ldots, m_b$.

Приведенный ниже алгоритм MVal находит вектор значений

$$\max_{y:\ By \leqslant b} A_i y, \quad i = 1, 2, \ldots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a},$$

используя прямой симплекс-метод.

Алгоритм MVal

- Исходные данные:
  - матрицы $A[(m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}) \times n], B[m_b \times n], b[m_b]$;
  - линейный порядок L на множестве I_A строк матрицы A, представляющий некоторое субоптимальное решение задачи коммивояжера в полном графе с множеством вершин I_A и весовой функцией $\rho(*,*)$ на множестве ребер, $L(A_i)$ – следующее за A_i ребро в цикле L;
  - распределение $T(K),\ K = 1, 2, \ldots N$ – по процессорам столбцов симплекс-таблицы для всего множества задач I_A.
- Результат: множество **result** =

$$\left\{ \left(\mathbf{S}[i] = A_i, \mathbf{V}[i] = \max_{y\colon\ By \leqslant b} A_i y, \mathbf{Y}[i] = \arg \max_{y\colon\ By \leqslant b} A_i y \right) : \ i = 1, 2, \ldots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a} \right\}.$$

- Шаг 1. [Инициализация] Каждому процессу $K = 1, 2, \ldots N$ положить
  - **result** $= \emptyset$, номер итерации $k = 0$;
  - ${}^{(k)}T(K)$ – блок столбцов начальной симплекс-таблицы процесса K для всего множества задач I_A, $A_t = \min\{A_i \in L\}$ – текущая задача.
- Шаг 2. [k-я итерация симплекс-метода]
  - Каждому процессу $K = 1, 2, \ldots N$ проверить выполнение условия оптимальности текущего допустимого базисного решения y для каждой целевой функции $A_i \in I_a$. Для функций $A_i \in I_a$, таких, что во всех процессах $K = 1, 2, \ldots N$ выполнено условие оптимальности положить **result** = **result** $\cup \{(A_i,\ A_i y,\ y)\},\ I_a = I_a \setminus \{A_i\}$. Если $A_t \notin I_A$, то перейти на Шаг 3.
  - Определить ведущий процесс [16] для целевой функции A_t, найти вводимую в базис и выводимую из базиса переменные.
  - Если выводимая из базиса переменная найдена, то положить $k = k + 1$, каждому процессу $K = 1, 2, \ldots, N$ вычислить модифицированную симплекс-таблицу ${}^{(k)}T(K)$ и повторить выполнение Шага 2. Иначе положить $I_a = I_a \setminus \{A_i\}$ и перейти на Шаг 3.
- Шаг 3. [Выбор следующей текущей целевой функции]
  - Пока $I_A \neq \emptyset$, полагать $A_t = L(A_t)$ и выполнять Шаг 2. Иначе перейти на Шаг 4
- Шаг 4. Останов, множество **result** содержит все тройки

$$\left(A_i,\ \max_{y\colon\ By \leqslant b} A_i y,\ \arg \max_{y\colon\ By \leqslant b} A_i y \right),$$

где A_i – строка, определяющая ограниченную на множестве $\{y : By \leqslant b\}$ функцию $A_i y,\ i = 1, 2, \ldots, m_a + \mathrm{C}^2_{m_a}$.

- Конец алгоритма MVal

Из описания алгоритма видно, что в основном все его процессы выполняются независимо. Межпроцессный обмен требуется только на шаге 2 при сводке результатов проверки выполнения условия оптимальности, выборе ведущего процесса и рассылки номера ведущей строки. Результативность алгоритма MVal очевидна.

Система ограничений (10) для представления множества S с матрицами $A, \tilde{A}, B, \tilde{B}$, как правило, оказывается избыточной, т.е. содержит одинаковые ограничения и ограничения, являющиеся следствием других. Известные подходы к свертыванию систем лнейных неравенств (например, [9] – [12], [17]) имеют экспоненциальную сложность. В тоже время очевидно, что минимальным по мощности множеством неравенств для описания полиэдра $X = \{x\mathbb{R}^n : \ Ax \leqslant a\}$ является множество фасетных неравенств [18] $A_{i*}x \leqslant a_i : \ \dim\left(X \cap \{x : \ A_{i*}x \leqslant a_i\}\right) = \dim\left(X\right) - 1$.

Очевидно, что фасетное неравенство $A_{i*}x \leqslant a_i$ является опорным к множеству X, т.е. $\max_{x\in X} A_i x = a_i$, причем свойство опорности устойчиво относительно возмущений параметра a_i. Найти фасетные неравенства полиэдра $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leqslant a\}$ можно применив постоптимизационный анализ к результатам алгоритма MVal$(A, \ A, \ a, \ L_A)$. Приведенный ниже алгоритм RMSum решает проблему нахождения фасетного представления $Cx \leqslant c$ суммы по Минковскому полиэдров $Ax \leqslant a$ и $Bx \leqslant b$.

Алгоритм RMSum

- Исходные данные: матрицы $A[m_a \times n]$, $B[m_b \times n]$, $a[m_a]$, $b[m_b]$.
- Результат: матрицы $C[m_c \times n]$, $c[m_c]$:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Cx \leqslant c\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leqslant a\} + \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Bx \leqslant b\}.$$

- Шаг 1. [Инициализация]

$$\tilde{A} = \left\{\tilde{A}_{i(m_a-1)+j,*} = A_{i*} + A_{j*} : \ i = 1, 2, \ldots, m_a - 1, \ j = i+1, i+2, \ldots, m_a\right\},$$

$$\tilde{a} = \left\{\tilde{a}_{i(m_a-1)+j,*} = a_{i*} + a_{j*} : \ i = 1, 2, \ldots, m_a - 1, \ j = i+1, i+2, \ldots, m_a\right\},$$

$$\tilde{B} = \left\{\tilde{B}_{i(m_b-1)+j,*} = B_{i*} + B_{j*} : \ i = 1, 2, \ldots, m_b - 1, \ j = i+1, i+2, \ldots, m_b\right\},$$

$$\tilde{b} = \left\{\tilde{b}_{i(m_b-1)+j,*} = b_{i*} + b_{j*} : \ i = 1, 2, \ldots, m_b - 1, \ j = i+1, i+2, \ldots, m_b\right\}.$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix}, \qquad \bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

- Шаг 2. [Упорядочение] Пусть L_A и L_B – линейные порядки на множествах строк матриц $\bar{A}$ и $\bar{B}$ соответственно, представляющие некоторое субоптимальные решения задач коммивояжера на полных графах с множеством вершин $\bar{A}$ и $\bar{B}$ и весовой функцией $\rho(*, *)$.

- Шаг 3. [Вычисление границ]

$$C_A = \text{MVal}\left(\bar{A}, \ B, \ b, \ L_A\right).\mathbf{result}; \quad C_B = \text{MVal}\left(\bar{B}, \ A, \ a, \ L_B\right).\mathbf{result}.$$

- Ш а г 4.[Формирование избыточной системы $Cx \leqslant c$]

$$C = (C_A).\mathbf{S} \cup (C_B).\mathbf{S}, \quad c = (C_A).\mathbf{V} \cup (C_B).\mathbf{S}$$

- Ш а г 5.[Нормировка, лексикографическая сортировка и предварительная отбраковка неравенств избыточной системы] $(C, c) = \mathrm{clear}(C, c)$.

- Ш а г 6.[Упорядочение] Пусть L_C – линейный порядок на множествах строк матрицы C, представляющиq некоторое субоптимальные решения задачи коммивояжера на полном графе на строках матрицы C с весовой функцией на ребрах $\rho(*, *)$.

- Ш а г 7. [Вычисление эффективных границ]

$$\tilde{C} = \mathrm{MV\textsc{al}}\,(C,\ C,\ c,\ L_C)\,.\mathbf{result}.$$

- Ш а г 8. [Окончательная чистка системы неравенств] $(C, c) = \mathrm{final\_clear}(C, c)$.

- Ш а г 9. Останов, $(Cx \leqslant c)$ – фасетное представление суммы по Минковскому полиэдров $Ax \leqslant a$ и $Bx \leqslant b$.

- Конец алгоритма RMSum

На Шаге 5 решается проблема очистки от неравенств с одинаковой левой частью. Очевидно, что данная задача может быть решена с помощью лексикографической сортировки отнормированных неравенств.

На Шаге 8 решается проблема удаления нефасетных неравенств. Такими являются все неопорные неравенства $C_{i*}x \leqslant c_i$, у которых $c_i > (\tilde{C}).V[i] = \max_{Cx \leqslant c} C_i x$, а также неравенства со свойством опорности неустойчивым относительно возмущений параметра a_i. Второй признак легко выявить зная $(\tilde{C}).Y[i] = \arg\max_{Cx \leqslant c} C_i x$.

Результативность алгоритма очевидна.

4. Заключение

Способ задания информационных множеств системами линейных неравенств (т.е. без использования метода двойного описания [5]) позволяет реализовать полиномиальные алгоритмы построения представления их суммы с наименьшим числом неравенств. Предложенный в работе алгоритм RMSum решает данную задачу. При выполнении алгоритма необходимо решение $O(m^2)$ (m – число неравенств в представлении информационных множеств) задач линейного программирования с одинаковым допустимым множеством. Предложенный в работе алгоритм MVal дает решение всего семейства задач с использованием общей симплекс-таблицы и применением распараллеливания по ее столбцам на число блоков равное числу возможных процессов N. Это существенно снижает требуемые вычислительные ресурсы по сравнению с приминением тривиального распараллеливания по задачам.

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что системы неравенств

$$\begin{pmatrix} A \\ \tilde{A} \end{pmatrix} x \leqslant \begin{pmatrix} a \\ \tilde{a} \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} B \\ \tilde{B} \end{pmatrix} y \leqslant \begin{pmatrix} b \\ \tilde{b} \end{pmatrix}$$

являются избыточными представлениями множеств X и Y соответственно, т.е.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leqslant a, \, \tilde{A}x \leqslant \tilde{a}\}, \ Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \ Bx \leqslant b, \, \tilde{B}x \leqslant \tilde{b}\}.$$

В соответствии с теоремой 1 имеем $S \supseteq X + Y$. Для доказательства обратного включения $S \subseteq X + Y$ достаточно показать, что все крайние точки множества S являются элементами $X + Y$.

Итак, пусть s – произвольная крайняя точка множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$;

$$I(s) = I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s) \cup I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)$$

– множество активных ограничений (т.е. уравнений), определяющих точку s;

$$(I_A(s), \, I_{\tilde{A}}(s), \, I_B(s), \, I_{\tilde{B}}(s))$$

– разбиение множества уравнений $I(s)$ на подмножества, ассоциированные с системами ограничений $Ax \leqslant a$, $\tilde{A}x \leqslant \tilde{a}$, $Bx \leqslant b$ и $\tilde{B}x \leqslant \tilde{b}$ соответственно.

С учетом принятых обозначений, имеем

$$\text{(П.1)} \quad (\forall i \in I_A \cup I_{\tilde{A}}(s)) \left(A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)} \right), \quad (\forall j \in I_B \cup I_{\tilde{B}}(s)) \left(B_{j*}s = b_j + B_{j*}x^{(j)} \right),$$

где

$$\text{(П.2)} \qquad x^{(j)} = \arg \max_{x : Ax \leqslant a} B_{j*}x, \quad y^{(i)} = \arg \max_{y : By \leqslant b} A_{i*}y.$$

Для завершения доказательства теоремы предваительно докажем следующую лемму.

Лемма 1. В системе уравнений (П.1), определяющей крайнюю точку $s \in S$, имеют место равенства

$$\text{(П.3)} \qquad (\forall i \in I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s)) \, y^{(i)} = y(s), \quad (\forall j \in I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)) \, x^{(j)} = x(s).$$

Доказательство леммы 1. Приведем доказательство для уравнений из множества $I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s)$, доказательство для уравнений множества $I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)$ делается аналогично.

Предложение 1. Если множество $I_A(s)$ содержит уравнения $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$, то

$$y^{(i)} = y^{(j)} = \arg \max_{y : By \leqslant b} (A_{i*} + A_{j*})y.$$

Доказательство предложения 1. Складывая уравнения $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$, получим

$$(A_{i*} + A_{j*})s = a_i + a_j + A_{i*}y^{(i)} + A_{j*}y^{(j)} \geqslant a_i + a_j + \max_{y : By \leqslant b} (A_{i*} + A_{j*})y,$$

Так как система неравенств, определяющая множество S, содержит противоположное неравенство

$$(A_{i*} + A_{j*})s \leqslant a_i + a_j + \max_{y:By\leqslant b}(A_{i*} + A_{j*})y,$$

то

$$\max_{y:By\leqslant b}(A_{i*} + A_{j*})y = a_j + A_{i*}y^{(i)} + A_{j*}y^{(j)}. \tag{П.4}$$

Предположение, что

$$y^{(i)}, y^{(j)} \neq \arg\max_{y:By\leqslant b}(A_{i*} + A_{j*})y$$

приводит к противоречию с равенством (П.4), следовательно в рассматриваемом случае

$$y^{(i)} = y^{(j)} = \arg\max_{y:By\leqslant b}(A_{i*} + A_{j*})y.$$

Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Если множество $I_{\tilde{A}}(s)$ содержит уравнение

$$(A_{i*} + A_{j*})s = a_i + a_j + (A_{i*} + A_{j*})y^{ij}, \text{ где } y^{ij} = \arg\max_{y:By\leqslant b}(A_{i*} + A_{j*})y, \tag{П.5}$$

то множество $I_A(s)$ содержит либо уравнение $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и при этом $y^{(i)} = y^{ij}$, либо уравнение $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$ и при этом $y^{(j)} = y^{ij}$.

Доказательство предложения 2. Действительно, возможны три случая:

$$\begin{array}{ll}
(1) & A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(ij)},\ A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(ij)}; \\
(2) & A_{i*}s \leqslant a_i + A_{i*}y^{(ij)},\ A_{j*}s \geqslant a_j + A_{j*}y^{(ij)}; \\
(3) & A_{i*}s \geqslant a_i + A_{i*}y^{(ij)},\ A_{j*}s \leqslant a_j + A_{j*}y^{(ij)}.
\end{array}$$

В первом случае мы имеем $y^{(ij)} = y^{(i)} = y^{(j)}$, т.е. предложение спрведливо.

Во втором случае из существования $s : A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ и очевидного неравенства $A_{i*}y^{(ij)} \leqslant A_{i*}y^{(i)}$ следует $y^{(ij)} = y^{(i)}$ и принадлежность уравнения $A_{i*}s = a_i + A_{i*}y^{(i)}$ множеству $I_A(s)$.

В третьем случае из существования $s : A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$ и очевидного неравенства $A_{j*}y^{(ij)} \leqslant A_{j*}y^{(j)}$ следует $y^{(ij)} = y^{(j)}$ и принадлежность уравнения $A_{j*}s = a_j + A_{j*}y^{(j)}$ множеству $I_A(s)$.

Предложение 2 доказано.

В соответствии с предложением 1 $(\forall i \in I_A(s))y^{(i)} = y(s)$. Отсюда в соответствии с предложением 2 имеем

$$(\forall i \in I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s))\, y^{(i)} = y(s).$$

Лемма доказана.

Если множества $I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s)$ и $I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s)$ не пусты, то $s = x(s) + y(s)$.

Предположим, что $I_A(s) \cup I_{\tilde{A}}(s) = \emptyset$, тогда определенным является только $x(s)$, но в соответствии с (П.1) и леммой 1 имеем

$$(\forall j \in I_B \cup I_{\tilde{B}}(s))\, (B_{j*}\,(x(s) + y(s)) = b_j + B_{j*}y(s))\,,$$

следовательно

$$(\forall j \in I_B \cup I_{\tilde{B}}(s))\, (B_{j*}y(s) = b_j)\,. \tag{П.6}$$

Система уравнений (П.6) определяет допустимое базисное решение на полиэдре представленным системой ограничений

$$By(s) \leqslant b + \max_{x:Ax\leqslant a} Bx - Bx(s). \tag{П.7}$$

Если $By(s) \leqslant b$, то справедливость теоремы очевидна. Предположение существования k, такого что

$$B_{k*}y(s) > b \tag{П.8}$$

приводит к противоречию. Действительно, пусть $j \in I_B$. Из (П.6) и (П.8) следует

$$(B_{j*} + B_{k*})\,(x(s) + y(s)) > b_j + b_k. \tag{П.9}$$

С другой стороны пара $(x(s), y(s))$ удовлетворяет ограничению

$$(B_{j*} + B_{k*})\,(x(s) + y(s)) \leqslant b_j + b_k + (B_{j*} + B_{k*})\,x(s) \;\Rightarrow (B_{j*} + B_{k*})\,y(s) \leqslant b_j + b_k,$$

которое противоречит (П.9).

Случай $I_B(s) \cup I_{\tilde{B}}(s) = \emptyset$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schweppe F.C.* Recursive state estimalion: unknown but bounded errors and systems inputs // IEEE Tram. Autom. Control. – 1968. – V. 13, № 1. – P.Ё22-28.

2. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.

3. *Черноусько Ф.Л.* Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.; Наука, 1988. – 320 с.

4. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез оптимальных и адаптивных систем управления: игровой подход. – Киев: Наукова думка, 1985. – 245 с.

5. *Лычак М.М.* Идентификация и оценивание состояния объектов управления на основе множественного подхода // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 5. – С. 34-41.

6. *Ширяев В.И.* Минимаксная фильтрация в реальном времени многошаговых систем // Проблемы управления и теории информации. – 1991. – № 5. – С. 805 – 812

7. *Хонин В.А.* О программах, реализующих алгоритмы аппроксимации области достижимости управляемой системы // Динамические задачи оценивания в условиях неопределенности. – Свердловск: УрО АН СССР, 1989. – С. 125 – 129.

8. *Уханов М.В., Ширяев В.И.* Алгоритмы построения информационных множеств для реализации минимаксного фильтра // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математика, физика, химия». – 2002. – Вып. 2, № 3. – С. 19 – 33.

9. *Черникова Н.Б.* Алгоритм для нахождения общей формулы неотрицательных решений системы линейных неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5, № 2. – С. 334 – 337.

10. *Черников С.Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.

11. *Уханов М.В.* Алгоритм построения суммы многогранников // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математика, физика, химия». – 2001. – Вып. 1, № 7. – С. 39 – 44.

12. *Лукацкий А.М., Шапот Д.В.* Конструктивный алгоритм свертывания систем линейных неравенств высокой размерности // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, №7. – С. 1167 – 1180.

13. *Панюков А.В., Тычинин С.А.* Применение дополнений паросочетаниями для решения задачи max tsp // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – Вып. 2, №27(127). – 2008. – С. 78 – 99.

14. *Панюков А.В., В.А. Пьянков* Алгоритм дополнения паросочетаниями для ассиметричной задачи коммивояжера // Математическое и статистическое исследование социально-экономических процессов / под ред. А.В. Панюкова. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ. – 2008. – С. 115 – 122.

15. *Панюков А.В., Горбик В.В.* Параллельные реализации симплекс-метода для безошибочного решения задач линейного программирования // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – №25. – 2011. – С. 107 – 118.

16. *Панюков А.В., Горбик В.В.* Применение массивно-параллельных вычислений для решения задач линейного программирования с абсолютной точностью // Автоматика и телемеханика. – 2012. – №2. – С. 73 –88.

17. *Бушенков И.Ф.,Лотов А.В.* Алгоритм анализа независимости неравенств в линейной системе// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1980. – Т. 20, №3. – С. 562 – 572.

18. *Емеличев В.А., Ковалёв М.М. Кравцов М.К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981.