© 2012 г. М.Ш. МАМАТОВ, д-р физ.-мат. наук
(Национальный университет Узбекистана им. М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан),
Х.Н. АЛИМОВ,
(Джизакский Политехнический институт, Джизак, Узбекистан)

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЯЕМЫХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Изучается задача преследования в системах управляемых с распределенными параметрами высокого порядка. Получены достаточные условия для возможности завершения преследования методом конечных разностей. Также даны машинные реализации с помощью параллельных вычислений изучаемой задачи.

GAME PROBLEM OF PROSECUTION IN SYSTEMS OPERATED WITH THE DISTRIBUTED PARAMETERS OF THE HIGH ORDER / M.SH. Mamatov (National university of Uzbekistan of Mirzo Ulugbek's name, HIGHER EDUCATION INSTITUTION small town, Tashkent 700174, Uzbekistan, E-mail: mamatovmsh@mail.ru), H.N.Alimov (Dzhizak polytechnical institute, Druzhby Narodov Avenue 4, Dzhizak 130100, Uzbekistan, E-mail: nematalimov@yandex.ru). The problem of prosecution in systems operated with the distributed parameters of a high order is studied. Sufficient conditions for possibility of completion of prosecution are received by a method of final differences. Machine realization by means of parallel calculations of a studied task is also given.

1.Введение

Теория дифференциальных игр возникла в результате математической идеализации технических задач. Некоторые постановки задач в теории дифференциальных игр можно проиллюстрировать на примере движения двух управляемых объектов, один из которых – преследующий (стремится догнать другого), а второй – убегающий (уходит от преследователя). Для того чтобы иметь конкретный пример, вообразим, что один самолет преследует другой. Цель первого самолета – догнать второй, цель второго уйти от преследования. Каждый пилот управляет своим самолетом, имея в виду свою цель и пользуясь информацией о ситуации. Рассмотрены упрощенные модели преследования, которые составляют предмет так называемой теории дифференциальных игр. Слово игра указывает на то обстоятельство, что будущее поведение каждого из самолетов неизвестно: оно зависит от воли пилота. Дифференциальной эта игра называется потому, что закон движения самолета описывается дифференциальными уравнениями.

Пусть в процессе движения объекты ведут беспрерывное наблюдение друг за другом и каждый момент времени с помощью управляющих параметров корректируют свое движение в зависимости от полученной информации о поведении противника. Тогда в соответствии с целью преследующего объекта ставится следующая задача преследования. Используя информацию о поведении убегающего объекта, выбрать свое управление в каждый момент времени t таким, чтобы по возможности быстрее достичь совпадения пространственных координат объектов.

Большинство исследований посвящено случаю, когда поведение управляемого объекта изображается моделью с сосредоточенными параметрами; математически такая модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Этой схемой охватываются многие проблемы дифференциальных игр, возникающие в различных областях естествознания. Математические вопросы дифференциальных игр, описывающие системы с сосредоточенными параметрами, разработаны очень подробно.

Однако во многих приложениях модели с сосредоточенными параметрами описывают явления недостаточно полно. Часто обнаруживается, что в системе, оптимальной в смысле упрощенной модели, оказываются неиспользованными заложенные в нее дополнительные возможности управления. Лучшее, более адекватное описание достигается в рамках моделей с распределенными параметрами, которые математически задаются дифференциальными уравнениями в частных производных. При использовании этих уравнений, в свою очередь, ставятся различные игровые задачи. Изучению одной из таких игровых задач посвящена данная работа.

В настоящей статье рассматривается только задача преследования, поэтому сформулируем предположение о характере информации для этой задачи.

Объект называется *управляемым*, если в каждый момент времени t, в пространственной точке x его состояние определяется вектором z некоторого векторного пространства, а закон движения описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial z}{\partial t} + (-1)^m \frac{\partial^{2m} z}{\partial x^{2m}} = -u + \upsilon, \qquad m = 1,2,..., \tag{1}$$

здесь $z = z(x,t)$ - фазовый вектор игры, z_t - частная производная z по t, u,υ - управляющие параметры. Управляющие параметры u и υ представляют собой, вообще говоря, не числа, а точки некоторого пространства. В случае, когда изучается технический объект, уравнение (1) задает не конкретное движение этого объекта, а его технические возможности. Для задания конкретного движения объекта нужно задавать его начальное состояние $z|_{t=t_0} = z(x,t_0)$ в начальный момент времени t_0 и граничные условия $z|_{S_T} = \bar{z}(x,t)$, а затем с течением времени определять значения управляющих параметров u и υ. Задание значений управляющих параметров u и υ может осуществляться различными способами. В конечном счете, параметры u и υ оказываются функциями x и t. Значения параметров могут определяться как по изменениям x и t, так и задаваться непосредственно как функция x и t: $u = u(x,t),\ \upsilon = \upsilon(x,t)$ или как функция другого управления от состояния объекта в этот момент времени $u = u(\upsilon(x,t), x, t),\ \ \upsilon = \upsilon(x,t)$, а также могут определяться в зависимости от каких-либо внешних факторов, например от поведения другого объекта.

В случае, когда рассматривается механический объект, часть координат вектора z определяет геометрическое положение объекта, а остальные координаты определяют скорости изменений геометрических координат объекта. В ряде случаев фазовое пространство объекта не является векторным пространством, а представляет собой более сложное многообразие.

2.Постановка задачи

Рассматривается следующая игровая задача, описываемая уравнением

$$\frac{\partial z}{\partial t}+(-1)^m \frac{\partial^{2m} z}{\partial x^{2m}}=-u(x,t)+\upsilon(x,t), \qquad m=1,2,..., \tag{2}$$

$$z(x,0)=f(x),\ 0<x<1; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^{2p} z(0,t)}{\partial x^{2p}}=\frac{\partial^{2p} z(1,t)}{\partial x^{2p}}=0, \quad (p=0,1,...,\ m-1;\ \ 0\le t\le T), \tag{4}$$

где $u,\upsilon-$управляющие параметры, $u-$управление преследования $u\in\overline{P}$, $\upsilon-$управление убегания $\upsilon\in\overline{Q}$, $\tilde{o}\in\Omega=\{\tilde{o}:0\le\tilde{o}\le1\}$, $(x,t)\in Q_T=\{(x,t):\ \tilde{o}\in\Omega,\ 0<t\le T\}$, $S_T=\{(x,t)|x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T]\}$, $\partial\Omega$ – граница области Ω. В R^1 выделено непустое терминальное множество $\overline{M}_1\subset R^1$.

Далее, напомним, что $W_2^1(\Omega)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов $L_2(\Omega)$, имеющих квадратично суммируемые по Ω обобщенные производные первого порядка; $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ – подпространство $W_2^1(\Omega)$, в котором плотным является множество всех гладких, финитных функций; $W_2^{1,0}(Q_T)$ – гильбертово пространство, состоящее из элементов пространства $L_2(Q_T)$, имеющих квадратично суммируемые по Q_T обобщенные производные z_x; $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ – подпространство $W_2^{1,0}(Q_T)$, в котором плотным множеством является гладкие функции, равные нулю вблизи S_T.

Известно [1,2], что при выполнении перечисленных выше условий задачи (1)-(3) имеет единственное обобщенное решение $z=z(x,t)$ в классе $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ при любых $u(x,t),\ \upsilon(x,t)\in L_2(Q_T)$ и $f(x)\in L_2(\Omega)$.

Следует отметить, что игры (1) в классе позиционных стратегий $u=u(x,t)$ и $\upsilon=\upsilon(x,t)$ рассматривались для различных классов распределенных систем в работах [3]-[7]. В частности в [3]-[5] задача преследования изучается в формализации, восходящей к работам Н.Н.Красовского и Ю.С.Осипова.

Настоящая статья примыкает к работам [3]-[13]. Заметим, что мы придерживаемся формализации, несколько отличающейся от упомянутой выше. Кроме того, наш метод исследования задач преследования отличается от методов работ [3]-[7]. В данной работе конечно-разностный метод применяется к решению задачи преследования, описываемого уравнением с распределенными параметрами высокого порядка вида (2).

Определение 1. В задаче (2)-(4) возможно ε – завершение ($\varepsilon>0$) преследования из начального положения $f(\cdot)$, если существуют число $T=T(f(\cdot))$ и функция

$u(\upsilon, x, t) \in \overline{P},\ \upsilon \in \overline{Q},\ x \in \Omega,\ t \in [0, T]$, такие, что для произвольной функции $\upsilon_0(x,t) \in \overline{Q},\ x \in \Omega,\ t \in [0,T]$ решение $z_0(x,t)$ задачи (1)-(3), где $u = u(\upsilon_0(x,t), x, t)$, $\upsilon = \upsilon_0(x,t)$, попадает на множество $\varepsilon I + \overline{M}_1$, при некотором $(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{x} \in \Omega,\ \tilde{t} \in [0,T]$: $z_0(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \varepsilon I + \overline{M}_1$, где $I = (-1,1)$.

Разобьем евклидово пространство R^2 переменных (x,t), прямыми $x_i = ih$, $h = \dfrac{1}{r}$, $i = 0, \pm 1, \ldots$, и $t_k = k\,l$, $l = \dfrac{T}{\theta}$, $k = 0,1,2,\ldots$ на прямоугольники: $Q_{(i,k)} = \omega_{(hl)} \times (k\,l, (k+1)l) = \{(x,t) : ih < x_i < (i+1)h, \quad k\,l < t < (k+1)l\}$, где r, θ – некоторые натуральные числа. Точки $(x_i,\ t_k)$, которые принадлежат множеству Q_T, образуют сетку Q_{Thl}, являясь ее узлами. У каждого узла имеются соседние узлы. Если все эти соседние узлы также принадлежат сетке Q_{Thl}, то узел $(x_i, t_k) = (ih,\ kl)$ называется "внутренним", в противном случае узел $(x_i,\ t_k)$ называется "граничным".

В качестве аппроксимации уравнения (2), примем следующее сеточное уравнение

(5) $$\frac{z_{i,k+1} - z_{i,k}}{l} + \frac{(-1)^m}{h^{2m}} \sum_{\alpha=1}^{n} \left[a\Delta^{2m} z_{i-m,k+1} + (1-a)\Delta^{2m} z_{i-m,k} \right] = -u_{i,k} + \upsilon_{i,k},$$

где h и l – значения шагов соответственно по x и t, $i = 1,2,\ldots,r-1$, $k = 0,1,\ldots,\theta - 1$,

$$z_{i,k} = z(ih, kl),\ z_{i,0} = f(ih),\ i = 1,2,\ldots,r-1,$$

$$z_{-i,k} = -z_{i,k},\ \ i = 0,1,\ldots,m-1,\ k = 0,1,\ldots,\theta,$$

$$z_{r+i,k} = -z_{r-i,k},\ \ i = 0,1,\ldots,m-1, k = 0,1,\ldots,\theta,$$

$$\Delta^{2m} z_{i-m,k} = \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j C_{2m}^j z_{i+m-j,k}, z_{i-m,k} = z((i-m)h,\ kl),$$

$$z_{i+m-j,k} = z((i+m-j)h, kl),\ \ C_{2m}^j = \frac{(2m)!}{j!(2m-j)!},\ 0 \le a \le 1,$$

$$u_{i,k} = u(ih, kl),\ \ \upsilon_{i,k} = \upsilon(ih, kl).$$

Нетрудно убедиться [14], [15] что решение $z_{i,k}$ разностной задачи (5) сходится к решению z исходной задачи (2), и имеет место следующая оценка скорости сходимости

(6) $$\left\| (z)_{hl} - z_{i,k} \right\|_{\Phi_{hl}} \le K_1 l + K_2 h^2, \text{ при } a \ne \frac{1}{2},$$

$$\left\| (z)_{hl} - z_{i,k} \right\|_{\Phi_{hl}} \le \overline{K}_1 l^2 + \overline{K}_2 h^2 \text{ , при } a = \frac{1}{2},$$

где $(z)_{hl}$ – значения точного решения задачи (2) в узлах сетки, Φ_{hl} – пространство сеточных функций, $\|\cdot\|_{\Phi_{hl}}$ – норма этого пространства, $K_1, \overline{K_1},$, $K_2, \overline{K_2}$, – константы.

Теперь для удобства представления, запишем задачу (5) в виде

(7) $$Az_{k+1} - Bz_k = -u_k + \upsilon_k,\ k = 0,1,2,...,\theta - 1,\ z_0 = \bar{f},$$

где z_k, u_k, υ_k – H - мерные матрицы-столбцы, $H = r - 1$– общее число узлов, принадлежащих одному слою, т.е. при данном $t = k\,l$, здесь

$$z_k = (z_{1,k}, z_{2,k}, \ldots, z_{r-1,k})^T,\ u_k = (u_{1,k}, u_{2,k}, \ldots, u_{r-1,k})^T,$$

$$\upsilon_k = (\upsilon_{1,k}, \upsilon_{2,k}, \ldots, \upsilon_{r-1,k})^T,\ \overline{f} = (f(h), f(2h), \ldots, f((r-1)h)^T$$

$$A = E + a\frac{l(-1)^m}{h^{2m}}C^m;\quad B = E + (1-a)\frac{l(-1)^m}{h^{2m}}C^m,$$

E -единичная матрица,

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ясно что, существует $A^{-1} \neq 0$. Обе части уравнения (7) умножаем на A^{-1}, и обозначая $A^{-1}B = G,\ A^{-1} = F$ получим

(8) $$z_{k+1} = Gz_k - Fu_k + F\upsilon_k,\quad k = 0,1,2,\ldots,\theta - 1,\ z_0 = \overline{f}.$$

Пусть теперь в R^H выделено терминальное множество M.

Определение 2. Будем говорить, что в игре (8) из точки $z_0 = \overline{f} \in R^H \setminus M$ можно завершить преследование за $N \leq \theta$ шагов, если по любой последовательности $\overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_1, \ldots, \overline{\upsilon}_{N-1}$ управления убегания можно построить такую последовательность $\overline{u}_0, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{N-1}$ управления преследования, что решение $\left(z_0, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_N\right)$ уравнения $z_{k+1} = Gz_k - F\overline{u}_k + F\overline{\upsilon}_k$, $k = 0,1,\ldots, N-1$, при некотором $d \leq N$ попадает на $M : \overline{z}_d \in M$.

3.Основные результаты

Предположим, что в игре (8) $M = M_0 + M_1$, где M_0 – $(H - \gamma)$-мерное линейное подпространство R^H, M_1– подмножество подпространства L – ортогонального дополнения M_0 в R^H. Через Π обозначим матрицу оператора ортогонального проектирования из R^H на L, а через $A + B$ и $A \overset{*}{-} B$ алгебраическую сумму и геометрическую разность множеств A, B соответственно. Пусть $P = \underbrace{\overline{P} \times \overline{P} \times \ldots \times \overline{P}}_{H}$,

$$Q = \underbrace{\overline{Q} \times \overline{Q} \times \ldots \times \overline{Q}}_{H}, \quad M_1 = \underbrace{\overline{M}_1 \times \overline{M}_1 \times \ldots \times \overline{M}_1}_{\gamma}, \quad 1 \le \gamma \le H,\ W(0) = W\{0\},$$

(9) $$W(m) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[\Pi G^k FP \overset{*}{-} \Pi G^k FQ \right],\ W_1(m) = M_1 + W(m) \text{ где } m = 1, 2, \ldots, \theta.$$

Теорема 1. Предположим, что N – наименьшее из тех натуральных чисел m, для каждого из которых имеет место включение $\Pi G^m z_0 \in W_1(m)$. Тогда в игре (8) из начального положения $z_0 = \overline{f}$ можно завершить преследования за N шагов.

Пусть теперь $W_2(0) = M_1, \qquad W_2(1) = [W_2(0) + \Pi FP] \overset{*}{-} \Pi FQ, \ldots,$

(10) $$W_2(m) = \left[W_2(m-1) + \Pi G^{m-1} FP \right] \overset{*}{-} \Pi G^{m-1} FQ,\ \ m = 0, 1, \ldots, \theta.$$

Теорема 2. Если N – наименьшее из тех натуральных чисел m, для каждого из которых имеет место включение $\Pi G^m z_0 \in W_2(m)$,то в игре (8) из начального положения $z_0 = \overline{f}$ можно завершить преследования за N шагов.

Пусть $\beta_m(\cdot) = \left\{ \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1} : \beta_k \ge 0,\ \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k = 1 \right\}$, и

$W(\beta_m(\cdot)) = \sum_{k=0}^{m-1} \left[(\beta_k M_1 + \Pi G^k FP) \overset{*}{-} \Pi G^k FQ \right],\ m = 1, 2, \ldots, \theta.$ Положим

(11) $$W_3(0) = M_1,\ W_3(m) = \bigcup_{\beta_m(\cdot)} W(\beta_m(\cdot)), \qquad m = 1, 2, \ldots, \theta.$$

Теорема 3. Если M_1 – выпуклое множество и N – наименьшее из тех натуральных чисел m, для каждого из которых имеет место включение $\Pi G^m z_0 \in W_3(m)$, то в игре (8) из начального положения $z_0 = \overline{f}$ можно завершить преследования за N шагов.

Теорема 4. Пусть в неравенстве (6) $K_1 l + K_2 h^2 < \varepsilon$, при $a \ne \frac{1}{2}$, и $\overline{K}_1 l^2 + \overline{K}_2 h^2 < \varepsilon$, при $a = \frac{1}{2}$, и в игре (8) из точки $z_0 = \overline{f}$ возможно завершение преследования в смысле определения 2. Тогда в игре (2) из начального положения $z|_{t=0} = z(x, 0) = f(x)$ можно завершить преследования в смысле определения 1.

4.Машинные реализации с помощью параллельных вычислений

В этом разделе дадим машинные реализации поставленной задачи с помощью параллельных вычислений (см. например [16]-[20]). Для того чтобы решить игровую задачу преследования (2) мы перешли с помощью метода конечных – разностей на дискретную игру (5), а оно эквивалентно игре (8). Для решения дискретной игры (8) распараллеливание вычислений применяем следующим образом. Так как метод программирования, основанный на параллелизме задач, предусматривает разбиение вычислительной задачи на несколько относительно самостоятельных подзадач. Каждая подзадача выполняется на своем процессоре. Для каждой подзадачи пишется своя собственная программа на обычном языке программирования. Подзадачи должны обмениваться результатами своей работы, получать исходные данные. Поэтому для решения изучаемой задачи мы условно берем четыре процессора №0, №1, №2, №3.

Процессором №0 вводится, все начальные данные и выполняется на каждом шаге все вычисления, зависящие для определения вектора $\Pi G^m z_0$. Например, частично он должен вычислять

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \mathbf{0} & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & \mathbf{0} & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} -14 & 14 & -6 & 1 & & & & & & \\ 14 & -20 & 15 & 6 & 1 & & & & & \\ -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & & \mathbf{0} & & \\ 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 \\ & & & & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 \\ & \mathbf{0} & & & & 1 & -6 & 15 & -20 & 14 \\ & & & & & & 1 & -6 & 14 & -14 \end{pmatrix},$$

…, и т.д.

Процессор №1 выполняет все вычисления, зависящие для определения множества $W_1(m)$, и проверяет выполнение включения $\Pi G^m z_0 \in W_1(m)$ на каждом шаге. Точно также процессоры №2 и №3 выполняют все вычисления, зависящие для определения соответственно множеств $W_2(m)$, $W_3(m)$ и проверяет выполнение включений $\Pi G^m z_0 \in W_2(m)$, $\Pi G^m z_0 \in W_3(m)$ на каждом шаге. Ясно, что для определения $W_1(m)$, $W_2(m)$, $W_3(m)$ на каждом шаге нужны будут данные, которые сохраняются и вычисляются в процессоре №0, например $z_0, \Pi; C, C^2, C^3,...; A, B; G, G^2, G^3,...$, и т.д.

Параллельное программирование представляет дополнительные источники сложности – необходимо управлять работой тысяч процессоров, координировать миллионы межпроцессорных взаимодействий. Для того чтобы решить задачу на параллельном компьютере, необходимо распределить вычисления между процессорами системы так, чтобы каждый процессор был занят решением части задачи. Здесь очень важно равномерная загрузка процессоров, если основная вычислительная работа будет ложиться только на часть из них, тогда уменьшается и выигрыш от распараллеливания.

В нашей задаче эти обстоятельства учтены. Вычисление останавливается в тот момент, когда впервые выполняется один из следующих включений: $\Pi G^m z_0 \in W_1(m)$, $\Pi G^m z_0 \in W_2(m)$, $\Pi G^m z_0 \in W_3(m)$. Так как если, например, впервые выполнено включение $\Pi G^m z_0 \in W_2(m)$ тогда в силу теоремы 2 игру (8) можно закончить в смысле определения 2, и поэтому в силу теоремы 4 можно закончить и игру (2) в смысле определения 1. Здесь мы заранее не сможем определить, какое из включений будет выполнено, на каком шаге. Поэтому вычисление происходит параллельно и для его реализации нужны одинаковые параллельные шаги. В таком смысле наша задача обладает скрытым параллелизмом.

5.Заключение

Резюмируя полученные результаты, приходим к выводу, что дифференциальная игра преследования (2), начинающаяся в момент t=0 из начального положения $z|_{t=0} = z(x,0) = f(x)$, может быть закончено за время, не превосходящее T.

Таким образом, для решения игровой задачи преследования вида (2) мы перешли к дискретной игре (8), а в теоремах 1-3 получены достаточные условия для решения подобных задач. С помощью теоремы 4 получены достаточные условия для решения задачи преследования (2). Здесь разность $z_{i,k} - (z)_{hl}$ (см. раздел 3) играет главную роль при решении задачи и означает устойчивость сеточного уравнения (5).

Проблема устойчивости сеточного уравнения (5) заключается в нахождении условий, при выполнении которых численная погрешность $\rho_{i,k} \equiv z_{i,k} - (z)_{hl}$ при возрастании k равномерно по всем i, $0 \le i \le n$, стремится к нулю, или, по крайней мере, остается ограниченной.

Если порождающиеся в процессе счета погрешности округления по мере их возникновения имеют тенденцию убывать, или хотя бы не возрастать, то уравнения (5) называется устойчивым. В противном случае накапливающиеся погрешности могут достигнуть такой величины, что численное решение $(z)_{hl}$ не будут иметь ничего общего с точным решением сеточной задачи (5). Само собой разумеется, что такие неустойчивые сеточные уравнения не могут быть использованы для численного решения дифференциальных игр.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Из (9), и по условию теоремы следует существования $a(k) \in \Pi G^k FP \overset{*}{-} \Pi G^k FQ$ и $b \in M_1$, что

(П.1) $$\Pi G^m z_0 = b + \sum_{k=0}^{m-1} a(k).$$

Пусть $\upsilon = \bar{\upsilon}_k = \bar{\upsilon}(k)$, $0 \le k \le m-1$ – произвольное допустимое управление убегающего игрока; управление преследующего игрока $u = \bar{u}_k = \bar{u}(k)$ построим как решение следующих уравнений

$$\Pi G^{m-k-1} F\bar{u}(k) - \Pi G^{m-k-1} F\bar{\upsilon}(k) = a(k),\ 1 \le k \le m-1.$$

Ясно, что эти уравнения имеют решения по выбору $a(k)$, так как $\bar{\upsilon}(k) \in Q$ и $\bar{u}(k) \in P$. Подставляя $\upsilon = \bar{\upsilon}(k) = \bar{\upsilon}_k$ и $u = \bar{u}(k) = \bar{u}_k$ в (8) получим

$$z_1 = Gz_0 - F\bar{u}_0 + F\bar{\upsilon}_0,$$

$$z_2 = Gz_1 - F\bar{u}_1 + F\bar{\upsilon}_1 = G^2 z_0 - GF\bar{u}_0 + GF\bar{\upsilon}_0 - F\bar{u}_1 + F\bar{\upsilon}_1, \ldots,$$

$$z_m = G^m z_0 - G^{m-1}F\bar{u}_0 + G^{m-1}F\bar{\upsilon}_0 - G^{m-2}F\bar{u}_1 + G^{m-2}F\bar{\upsilon}_1 - \ldots - F\bar{u}_{m-1} + F\bar{\upsilon}_{m-1}.$$

Отсюда, применяя, к обеим частям равенства оператор проектирования Π, и из равенства (П.1) имеем

$$\Pi z_m = \Pi G^m z_0 - \Pi G^{m-1}F\bar{u}_0 + \Pi G^{m-1}F\bar{\upsilon}_0 - \ldots - \Pi F\bar{u}_{m-1} + \Pi F\bar{\upsilon}_{m-1} =$$

$$= \Pi G^m z_0 - \sum_{k=0}^{m-1} a(k) = b \in M_1.$$

Значит, $\Pi z_m = b \in M_1$, т.е. $z_m \in M$. Что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\bar{\upsilon}_0, \bar{\upsilon}_1, \ldots, \bar{\upsilon}_{m-1}$, $\bar{\upsilon}_k \in Q$, $0 \le k \le m-1$ – произвольная последовательность. По условию теоремы, и в силу (10), получим включение

$$\Pi G^m z_0 + \Pi G^{m-1}F\bar{\upsilon}_0 \in W_2(m-1) + \Pi G^{m-1}FP.$$

Теперь в качестве $\bar{u}_0$ берем тот элемент из множества P, для которого сохраняется последнее включение, в результате получаем

$$\Pi G^m z_0 + \Pi G^{m-1}F\bar{\upsilon}_0 - \Pi G^{m-1}F\bar{u}_0 \in W_2(m-1).$$

Из этого включения, учитывая равенство (8), имеем

$$\Pi G^{m-1}(Gz_0 - F\bar{u}_0 + F\bar{\upsilon}_0) \in W_2(m-1).$$

то есть

$$\Pi G^{m-1} z_1 \in W_2(m-1).$$

Если теперь управление $\bar{\upsilon}_1$ становится известным, то вышеизложенным способом можно построить управление $\bar{u}_1$, обеспечивающее включение

$$\Pi G^{m-2} z_2 \in W_2(m-2).$$

Далее, рассуждая аналогично, получаем

$$\Pi z_m \in W_2(0) = M_1.$$

и значит

$$z_m \in M,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 3. Вместо включения (11), рассмотрим эквивалентное ему включение

$$\Pi G^m z_0 \in W(\overline{\beta}_m(\cdot)),$$

существование $\overline{\beta}_m(\cdot) = \{\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_{m-1}\}$ следует из условии теоремы.

Отсюда получим

$$\text{(П.2)} \qquad \Pi G^m z_0 \in \sum_{k=0}^{m-2} \left[(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi G^k FP) \overset{*}{-} \Pi G^k FQ \right] + (\overline{\beta}_{m-1} M_1 + \Pi G^{m-1} FP) \overset{*}{-} \Pi G^{m-1} FQ.$$

Пусть теперь $\overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_1, ..., \overline{\upsilon}_{m-1}$, $\overline{\upsilon}_k \in Q$, $0 \le k \le m-1$ – произвольная последовательность. В силу (П.2) для $\overline{\upsilon}_0$ получим

$$\text{(П.3)} \qquad \Pi G^m z_0 + \Pi G^{m-1} F \overline{\upsilon}_0 \in \sum_{k=0}^{m-2} \left[(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi G^k FP) \overset{*}{-} \Pi G^k FQ \right] + \overline{\beta}_{m-1} M_1 + \Pi G^{m-1} FP.$$

Управление $\overline{u}_0 \in P$ построим как решение следующего уравнения

$$\Pi G^{m-1} F \overline{\upsilon}_0 - \Pi G^{m-1} F \overline{u}_0 = \overline{\beta}_{m-1} a_1, \quad a_1 \in M_1.$$

Далее, в силу (П.3) имеем

$$\Pi G^{m-1} (G z_0 - F \overline{u}_0 + F \overline{\upsilon}_0) \in \sum_{k=0}^{m-2} \left[(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi G^k FP) \overset{*}{-} \Pi G^k FQ \right] + \overline{\beta}_{m-1} a_1.$$

Поэтому, в силу (8) получим

$$\Pi G^{m-1} z_1 \in \sum_{k=0}^{m-2} \left[(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi G^k FP) \overset{*}{-} \Pi G^k FQ \right] + \overline{\beta}_{m-1} a_1.$$

Точно также, если управление $\overline{\upsilon}_1$ становится известным, то вышеизложенным способом можно построить управление $\overline{u}_1$, обеспечивающее включение

$$\Pi G^{m-2} z_2 \in \sum_{k=0}^{m-3} \left[(\overline{\beta}_k M_1 + \Pi G^k FP) \overset{*}{-} \Pi G^k FQ \right] + \overline{\beta}_{m-1} a_1 + \overline{\beta}_{m-2} a_2, \quad a_2 \in M_1,$$

и т.д. Таким образом, имеем

$$\Pi z_m = \overline{\beta}_{m-1} a_1 + \overline{\beta}_{m-2} a_2 + \ldots + \overline{\beta}_0 a_m \in \overline{\beta}_{m-1} M_1 + \overline{\beta}_{m-2} M_1 + \ldots + \overline{\beta}_0 M_1 \in$$
$$\in (\overline{\beta}_{m-1} + \overline{\beta}_{m-2} + \ldots + \overline{\beta}_0) M_1 = M_1,$$

отсюда имеем

$$z_m \in M.$$

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть в игре (8) из точки $z_0 = \overline{f}$ можно завершить преследования за $N \le \theta$ шагов. Тогда из определения 2 следует, что по любой последовательности $\overline{\upsilon}_0, \overline{\upsilon}_1, \ldots, \overline{\upsilon}_{N-1}$, $\overline{\upsilon}_k \in Q$, $0 \le k \le N-1$ управления убегания можно построить такую последовательность $\overline{u}_0, \overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_{N-1}$, $\overline{u}_k \in P$, $0 \le k \le N-1$, управления преследования, что решение $(z_0, \overline{z}_1, \ldots \overline{z}_N)$ уравнения $z_{k+1} = G z_k - F \overline{u}_k + F \overline{\upsilon}_k$, $k = 0,1,\ldots N-1$, при некотором $d \le N$ попадает на

$M : \bar{z}_d \in M$. Пусть теперь в игре (2) $\upsilon = \bar{\upsilon}(x,t) \in \bar{Q}$, $(x,t) \in Q_T$ – произвольное управление убегающего игрока из класса $L_2(Q_T)$. Зная управление убегающего $\upsilon = \bar{\upsilon}(x,t)$, мы можем определить $\bar{\upsilon}_{i,k}$ как значение этой функции в узловых точках сетки Q_{Thl}, т.е. можем определить υ_k:

$$\upsilon_k = \bar{\upsilon}_k = (\bar{\upsilon}_{1,k}, \bar{\upsilon}_{2,k}, \ldots, \bar{\upsilon}_{r-1,k}, \ldots, \bar{\upsilon}_{i,k}, \ldots, \bar{\upsilon}_{r-1,k}).$$

Отсюда, в силу условия теоремы, можно построить управление преследователя в игре (8), обеспечивающее завершение преследования

$$u_k = \bar{u}_k = (\bar{u}_{1,k}, \bar{u}_{,2,k}, \ldots, \bar{u}_{r-1,k}, \ldots, \bar{u}_{ii,k}, \ldots, \bar{u}_{r-1,k}).$$

Теперь в игре (2) управление преследующего игрока $u = \bar{u}(x,t)$ построим следующим образом: $\bar{u}(x,t) = \{\bar{u}_{i,k} : ih \le x_i \le (i+1)h$, $i = 0,1,\ldots,r-1$, $kl \le t \le (k+1)l$, $k = 0,1,\ldots,\theta - 1\}$. Ясно, что $u \in P$ и $\bar{u}(x,t) \in L_2(Q_T)$. Подставляя $\upsilon = \bar{\upsilon}(x,t)$, $u = \bar{u}(x,t)$ в (2) получаем дифференциальное уравнение, точно также подставляя $\upsilon_{i,k} = \bar{\upsilon}_{i,k}$, $u_{i,k} = \bar{u}_{i,k}$ в (5) получаем сеточное уравнение, аппроксимирующее уравнения (2).

Пусть $(\bar{z})_{hl}$ – значение точного решения, соответствующее управлениям $\upsilon = \bar{\upsilon}(x,t)$, $u = \bar{u}(x,t)$ задачи (2) в узлах сетки Q_{Thl}, $\bar{z}_{i,k}$ – решение, соответствующее управлениям $\upsilon_{i,k} = \bar{\upsilon}_{i,k}$, $u_{i,k} = \bar{u}_{i,k}$ разностной задачи (5), тогда из (6), и из условия теоремы имеем

$$\left\| (z)_{hl} - \bar{z}_{i,k} \right\|_{\Phi_{hl}} \le K_1 l + K_2 h^2 < \varepsilon .$$

Отсюда, и из того, что $\bar{z}_{i,k} \in \overline{M}_1$, при $k = d$ и некоторых $i = i_1$, получаем $(z)_{hl} - \bar{z}_{i,k} \in \varepsilon I$, $(z)_{hl} \in \varepsilon I + \bar{z}_{i,k}$, $(z)_{hl} \in \varepsilon I + \overline{M}_1$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Browder F.* Linear parabolic differential equations of arbitrary order; general boundary –value problems for elliptic equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39. 1953. № 3. C.185-190.
2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. Учеб. пособ. Москва: Наука, 1973.
3. *Осипов Ю.С.* Позиционное управление в параболических системах // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 2. С. 195-201.
4. *Осипов Ю.С., Короткий А.И.* Аппроксимация в задачах позиционного управления параболическими системами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 4. С. 599-605.
5. *Осипов Ю.С., Пандольфи Л., Максимов В.И.* Задача робастного граничного управления: случай краевых условий Дирихле // Докл. РАН. Москва. 2000. Т.374. № 3. С. 310-312.
6. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* Оптимальное граничное управление смещением на одном конце при свободном втором конце и отвечающее ему распределение полной энергии струны // Докл. РАН. Москва. 2005. Т. 400. № 5. С. 587-591.

7. *Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением при упругом закреплении. I // Дифференц. уравнения. Минск. 2002. Т. 38. № 3. С. 393-403.
8. *Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М.* О некоторых игровых задачах в распределенных управляемых системах // ПММ. Москва. 2005. Т. 69. Вып. 6. С. 997-1003.
9. *Сатимов Н.Ю., Тухтасинов М.* Об игровых задачах на фиксированном отрезке в управляемых эволюционных уравнениях первого порядка // Мат. заметки. Москва. 2006. Т. 80. Вып. 4. С. 613-625.
10. *Тухтасинов М., Маматов М.Ш.* О задачах преследования в управляемых распределенных системах // Мат. заметки. Москва. 2008. Т. 84. Вып. 2. С. 273-280.
11. *Тухтасинов М., Маматов М.Ш.* О задачах перехода в управляемых системах // Дифференц. уравнения. Минск. 2009. Т. 45. № 3. С. 425-430.
12. *Маматов М.Ш.* О применении метода конечных разностей к решению задача преследования в системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. Москва. 2009. № 8. С.123-132.
13. *Маматов М.Ш.* К теории дифференциальных игр преследования в системах с распределенными параметрами // Автоматика и вычислительная техника. Рига. 2009. № 1.С. 5-14.
14. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989.
15. *Соульев В.К.* Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М.: Физматгиз, 1960.
16. *Воеводин Вл.В., Жуматый С.А.* Вычислительное дело и кластерные системы. М.: Издательство МГУ, 2007.
17. *Грегори Р. Эндрюс*. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования. М.: Изд. дом. «Вильямс», 2003.
18. *Гергель В.П., Стронгин Р.Г.* Основы параллельных вычислений для многопроцессорных вычислительных систем. Н.Новгород, ННГУ, 2003.
19. *Тыртышников Е.Е.* Методы численного анализа. М.: Издательский центр «Академия», 2007.
20. *Grama A., Gupta.A.,Kumar V.* Introduction to Parallel Computing. Harlow, England: Addison – Wesley, 2003.