© 2012 г. А.В. КИМ, д-р физ.-мат. наук
(ИММ УрО РАН),
В.М. КОРМЫШЕВ, канд. техн. наук
М.А. САФРОНОВ,
(Уральский Федеральный Университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина)

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ [1]

В статье представлены результаты работ по распараллеливанию алгоритмов стабилизации систем с последействием, построенных на основе теории Аналитического конструирования регуляторов для систем с последействием.

PARALLEL ALGORITHMS LINEAR-QUADRATIC STABILIZATION OF TIME DELAY SISTEMS / A.V. Kim (Institute of Mathematics and Mechanics Russian Academy of Sciences [Ural Branch], 16, S.Kovalevskaja street, 620219, Ekaterinburg, RUSSIA, E-mail: avkim@imm.uran.ru), V. M. Rormyshev (Ural Federal University, 620002, Ekaterinburg, ul. Mira, 19, E-mail: Kormyshev@gmail.com), M.A. Safronov (Ural Federal University, 620002, Ekaterinburg, ul. Mira, 19, E-mail: samaxan@gmail.com). The paper presents the results of work on parallelizing algorithms of time delay system stabilization based on the theory of analytical design of controllers for systems with delays.

1. Введение

Прикладные задачи управления являются многовариантными, в том смысле, что полный анализ задачи требует, как правило, расчета систем управления при различных значениях параметров, что определяет высокие вычислительные требования к используемым алгоритмам, программному обеспечению и вычислительной технике.

В системах управления, как правило, присутствует эффект запаздывания[2], определяемый временем, необходимым для проведения измерений, обработки информации и передачи сигналов. Последействие также может быть вызвано физическими характеристиками изучаемого процесса. Для математического описания процессов с последействием разработан аппарат Функционально-Дифференциальных Уравнений.

---

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00117-а, 11-01-00117-а), Программы президиума РАН «Фундаментальные науки медицине», Урало-сибирского междисциплинарного проекта.

[2] последействия

Даже если состояние исходной системы задается конечным числом параметров, то появление последействия принципиально меняет ее динамику, делая систему бесконечномерной – требующей формализации и рассмотрения ее состояния как элемента некоторого функционального пространства. Это определяет дополнительные вычислительные сложности при компьютерном моделировании систем с последействием.

Отмеченные выше требования и сложности компьютерного моделирования управляемых процессов с последействием определяют необходимость распараллеливания используемых алгоритмов и организацию расчетов высокопроизводительных (многопроцессорных) вычислительных комплексах.

Отметим, что при компьютерном моделировании управляемых систем с последействием распараллеливать можно как численные алгоритмы приближенного решения ФДУ, так и сами алгоритмы управления.

2. Линейно-квадратичные алгоритмы стабилизации

2.1. Постановка задачи стабилизации

В статье рассматривается задача построения стабилизирующих управлений с обратной связью для линейной системы с последействием

$$\dot{x}(t) = Ax + A_\tau x(t-\tau) + \int_{-\tau}^{0} C(s)x(t+s)ds + Bu \,, \tag{1}$$

где A, A_τ - $n\times n$ матрицы, $C(\cdot)$ - $n\times n$ матрица с непрерывными на $[-\tau,0]$ элементами, B - $n\times r$ матрица, $x\in R^n$, $u\in R^r$.

Для линейных конечномерных систем, описываемых ОДУ, эффективные алгоритмы построения стабилизирующих управлений строятся на основе теории Аналитического Конструирования Регуляторов (АКОР) и требует только лишь решения матричного Алгебраического Уравнения Риккати[3]. В работах [1,4,5] разработана завершенная теория АКОР для систем с последействием и соответствующие конструктивные алгоритмы синтеза линейных управлений с обратной связью.

$$u[x, y(\cdot)] = Px + \int_{-\tau}^{0} Q(s)\,y(s)ds \,. \tag{2}$$

Элементы $r\times n$ матриц P, Q находятся из решения системы Обобщенных Уравнений Риккати[4] (ОУР), являющейся естественным обобщением АУР на случай систем с запаздыванием. В [4,5] получены 6 вариантов точных решений ОУР, что позволяет в явном виде строить соответствующие реализации управлений (2).

---

[3] Решения АУР можно вычислить с помощью стандартного программного обеспечения, например are.m из Control System Toolbox (for use with Matlab).

[4] ОУР является матричной системой алгебраических уравнений, ОДУ и уравнений с частными производными.

Найденные решения ОУР зависят от 6 матричных параметров с функциональными элементами, по которым может проводиться стабилизация системы и оптимизация процесса.

2.2. Численные алгоритмы приближенного решения ФДУ

Достаточно полный анализ систем управления в динамических системах практически неосуществим без возможности проведения компьютерного моделирования рассматриваемого класса динамических моделей. Поэтому параллельно с развитием теории линейно-квадратичной стабилизации, авторами статьи разрабатывались численные методы приближенного решения ФДУ. Результатом этих исследований стали подытоженный в [2,4] общий подход к разработке численных методов для ФДУ, а также создание на основе разработанных алгоритмов пакета прикладных программ Time-Delay System Toolbox (for use with Matlab) для компьютерного моделирования и анализа различных классов систем с последействием.

2.3. Необходимость разработки параллельных алгоритмов

К началу XXI века стало понятно, что возможностей персональных компьютеров недостаточно для эффективной реализации разработанных численных методов и алгоритмов управления для систем с последействием. В связи с чем были начаты исследования по распараллеливанию алгоритмов приближенного решения ФДУ.

3. Параллельные алгоритмы

3.3. Алгоритмы

Разработанные методы решения ФДУ являются итерационными, т.е. значение функции на текущем шаге вычисляется на основании значения, полученного на предыдущем шаге, а значение в начальной точке расчета задано явно. Из этого следует, что время, необходимое для решения ФДУ, напрямую зависит от длины промежутка, на котором происходит расчет, и увеличение промежутка приводит к увеличению времени работы алгоритма.

В общем случае, время работы алгоритма решения ФДУ можно вычислить по следующей формуле [13]:

$$S_N = NT_s, \tag{3}$$

где S_N — время работы алгоритма решения ФДУ на всем промежутке,

N — число точек на промежутке, в которых происходит расчет значений функционально-дифференциального уравнения,

Ts — время выполнения вычислений для одной точки промежутка.

Из формулы (3) следует, что уменьшить общее время расчета можно двумя способами:

1) уменьшить время расчета значения ФДУ Ts в каждой точке промежутка за счет оптимизации (распараллеливания) вычислений;

2) организовать расчет значений ФДУ в нескольких точках промежутка одновременно.

Второй способ не может быть реализован, т.к. методы численного решения ФДУ является итерационными, что предполагает проведение расчетов последовательно во всех точках промежутка, а значит, множитель N в формуле останется неизменным. Распараллелить задачу по промежутку не представляется возможным.

В данной ситуации остается только первый способ - уменьшать второй сомножитель Ts формулы (3) путем распараллеливания вычислений в каждой точке промежутка. Ускорение вычислений на каждом шаге расчета ФДУ в данном случае будет происходить в основном за счет:

1) распараллеливания операций над векторами и матрицами;
2) разбиения промежутка вычисления определенного интеграла уравнения (1).

Данный подход, конечно, не позволит уйти от большой размерности по промежутку, но в большинстве случаев поможет несколько ускорить вычисления.

Не вызывает сомнения, что эффективность работы данного параллельного алгоритма будет во многом зависеть от размерности матриц и векторов, которые придется обсчитывать на каждом шаге расчета ФДУ. Для матриц небольшой размерности может возникнуть ситуация, когда последовательный алгоритм решения ФДУ будет работать быстрее параллельного, т.е. затраты на распараллеливание будут значительно больше выгод от применения параллельных вычислений. Данная ситуация в первую очередь связана с высокими накладными расходами на обмен данными в кластерах [11-13] и необходимостью синхронизации полученных результатов на каждой итерации алгоритма решения ФДУ.

В общем случае разбиение промежутка вычисления определенного интеграла на промежутки, число которых равно числу процессоров, использующихся для численного решения ФДУ, может привести к некоторому ускорению работы алгоритма при больших значениях запаздывания.

3.4. Результаты расчетов

Результаты проведенных расчетов показывают, что управление с обратной связью, построенное на основе второго варианта явных решений Обобщенных Уравнений Риккати стабилизирует процесс сгорания топлива в жидкостном ракетном двигателе. Траектория замкнутой системы (см. рисунок 1) и сходится к некоторому стационарному значению β и, следовательно является β-стабилизирующим.

Таким образом, управление с обратной связью, построенное на основе второго варианта явных решений ОУР метода аналитического конструирования регуляторов для систем с последействием, β-стабилизирует процесс сгорания топлива, т.е. поддерживает его в определенном стационарном режиме.

Результаты расчетов с использованием распараллеленных алгоритмов численного решения ФДУ, приведенные в таблице 1, показывают, что при небольшой размерности матриц даже за счет распараллеливания вычисления определенного интеграла нельзя достигнуть значительного ускорения расчета ФДУ. Наоборот, наблюдается увеличение времени работы алгоритма на кластере.

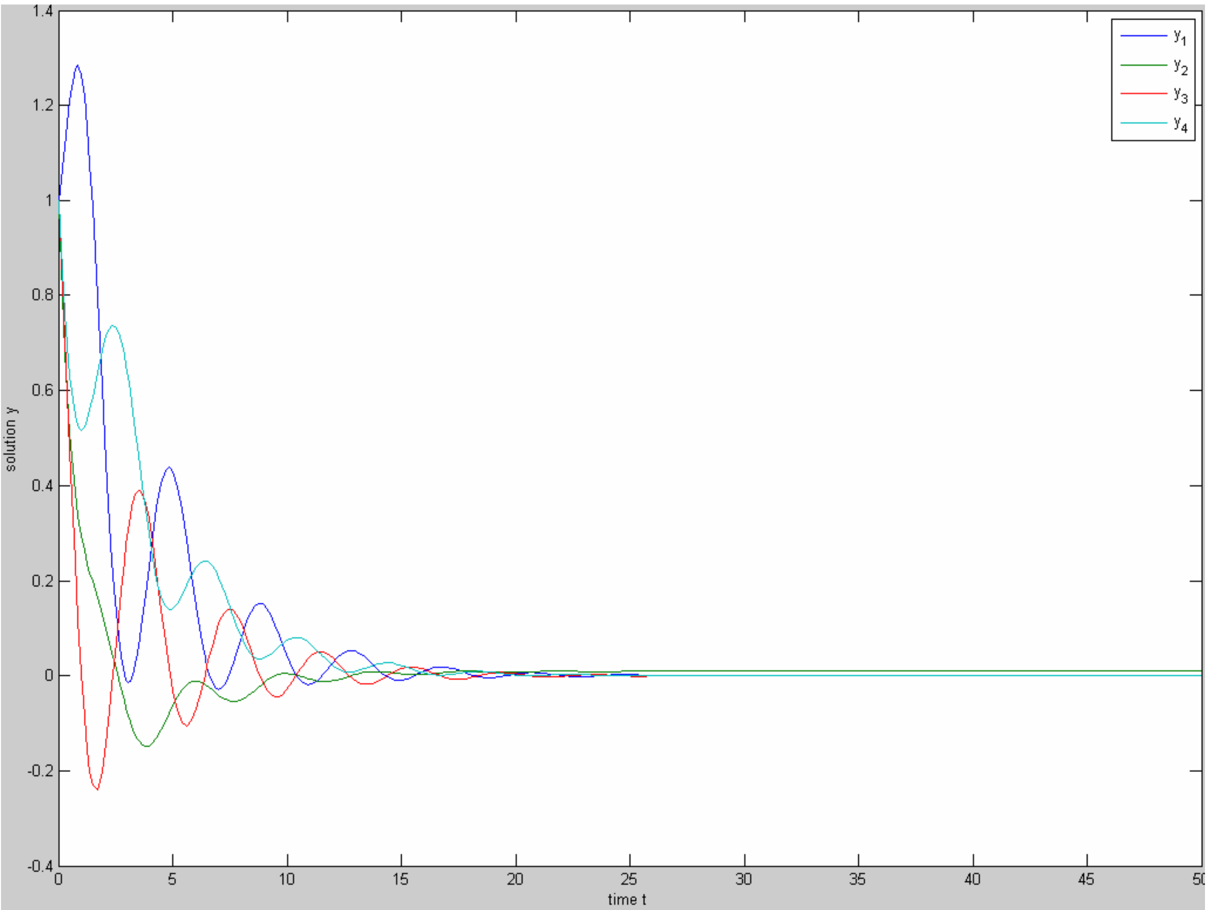

Рис. 1. Запаздывание равно 0,5 и единичная предыстория

Таблица 1. Зависимость времени решения ФДУ от количества используемых процессоров

Количество ЦП	1	2	4	6
Среднее время расчета за 10 испытаний, сек.	5,38	5,76	6,19	7,14

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени // Прикл. Матем. и Механ. 1962. Т. 26, N 1. С. 39-51.

2. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. Регулярная и хаотическая динамика. М.-Ижевск. 2004. 140 с.

3. *Ким А.В., Кормышев В.М., Чой Е.С., Квон О.Б., Ю Г.С.* Математическое и компьютерное исследование некоторых задач теории функционально-дифференциальных уравнений. Екатеринбург: УрФУ, 2011. 103 с.
4. *Ким А.В., Красовский А.Н.* Математическое и компьютерное моделирование систем с последействием. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010. 134 с.
5. *Квон В.Х., Ким А.В., Кормышев В.М., Пименов В.Г., Солодушкин С.И.* Аналитическое конструирование регуляторов для систем с последействием. Екатеринбург. Изд-во Уральского федерального университета. 2010.
6. *Осипов Ю.С.* Стабилизация управляемых систем с запаздыванием. Дифференц. уравнения. 1965. Т. 1, N5. С. 463-473.
7. *Ким А.В., Ложников А.Б.* Математическое моделирование систем с последействием: теория алгоритмы, программное обеспечение// Известия Института математики и информатики. 2002. №2. С. 55-58
8. *Kim A., Lozhnikov A.* Practical criterion for stability verification of linear systems with delays // Stability Analysis and Control: Theory and Applications. 2000. Vol. 3. no. 2.
9. *Kim A.V. Kwon W.H. Pimenov V.G., Han S. H. ,Lozhnikov A.B. , Onrgova O.V.* Time-delay System Toolbox (for use with MATLAB). 1999. Seoul. Seoul National University.
10. *Воеводин В.В., Воеводин Вл.В.* Параллельные вычисления. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 608 с.
11. *Оленёв Н.Н., Печёнкин Р.В., Чернецов А.М.* Параллельное программирование Matlab и его приложения. – М.: ВЦ РАН, 2007. 120 с.
12. *Таненбаум Э., ванн Стеен М.* Распределенные системы. Принципы и парадигмы. – СПб.: Питер, 2003. 877 с.
13. *Rauber T., Runger G.* Parallel Programming: for Multicore and Cluster Systems. – Springer, 2010. 450 p.